Utdanningsdirektoratet

Eksamen

05.12.2007

AA6524 Matematikk 3MX Elevar/Elever

AA6526 Matematikk 3MX Privatistar/Privatister

Nynorsk/Bokmål

Oppgave 1

a) Deriver funksjonen:

$f(x) = \cos(x^2 + 1)$

b) Løs likningen og oppgi svaret med eksakte verdier:

$\sin x - \sqrt{3}\cos x = -2\sin x \quad , \quad x \in [0, 2\pi\rangle$

c) Bestem integralet:

$\int x \cdot \cos 3x \, dx$

d) Bestem integralet:

$\int 2x \cdot e^{(x^2+3)} \, dx$

e) Gitt funksjonen $f(x) = \sqrt{3}\sin x + 3\cos x$. Skriv $f(x)$ på formen $f(x) = A\sin(x + \varphi)$

f) En gresskarprodusent veier 8 tilfeldige gresskar. Tabellen nedenfor viser resultatet av målingene:

Gresskar nr.	1	2	3	4	5	6	7	8
Vekt i kg	3,5	3,8	4,5	6,9	5,1	2,2	4,9	3,3

Bestem et estimat for gjennomsnittsvekten av gresskar. Hva blir standardfeilen til estimatet?

g) En kurve er gitt ved $r(\theta) = 2\theta \qquad \theta \in [0,\ 2\pi]$

1) Skisser kurven til $r(\theta)$.

Kurven og 1.-aksen avgrenser et område.

2) Finn arealet av den delen av området som ligger under 1.-aksen.

Oppgave 2

På en øde øy varierer antallet insekter periodisk etter følgende modell:

$$I(t) = 4\,000 \sin(0,785\,t + 0,785) + 10000$$

der t står for antallet uker etter 1. juni.

a) Hva er perioden for denne funksjonen, og hvor mange insekter er det den 1. juni?

b) Finn det største og det minste antallet insekter ved regning.

Insektstammen består av to arter. Den ene arten, *R,* er rovinsekter og lever av den andre arten, *P*. Antallet rovinsekter varierer mellom 170 og 5830, med samme periode som $I(t)$. Ved $t = 0$ er antallet rovinsekter 3000, og antallet er økende.

c) Forklar at $R(t) = 2\,830 \sin(0,785\,t) + 3000$. Tegn grafen til R for $t \in [0\,,\ 25\rangle$.

Arten P er gitt ved $P(t) = I(t) - R(t)$.

d) Tegn grafen til P i samme koordinatsystem som R for $t \in [0\,,\ 25\rangle$.

e) Bruk grafen til P til å skrive $P(t)$ på formen $P(t) = A\sin(ct + \varphi) + d$

Oppgave 3

I denne oppgaven skal vi anta at hvilepulsen til godt trente menn er normalfordelt med et gjennomsnitt på 55 og et standardavvik på 6.

Vi trekker ut en tilfeldig valgt mann.

a) Hva er sannsynligheten for at mannens hvilepuls er lavere enn 50?

b) Hva er sannsynligheten for at mannens hvilepuls er høyere enn 62?

c) Hva er sannsynligheten for at mannens hvilepuls er mellom 43 og 67?

Vi definerer *topptrente menn* som den 5 % andelen av godt trente menn som har lavest hvilepuls.

d) Hvilken hvilepuls må en mann ha for å kunne kalle seg topptrent?

Oppgave 4

Du skal besvare <u>enten</u> alternativ I <u>eller</u> alternativ II.
De to alternativene er likeverdige ved vurderingen.

(Dersom besvarelsen inneholder deler av begge,
vil bare det du har skrevet på alternativ I, bli vurdert.)

Alternativ I

Gitt rekka

$$e^{10} + e^{9} + e^{8} + e^{7} + \cdots \,, \quad \text{der } e \text{ er Eulers tall } (e \approx 2{,}72)$$

a) Forklar at dette er en geometrisk rekke. Skriv opp formelen for det generelle leddet a_n i denne rekka.

b) Forklar at rekka konvergerer. Finn summen S.

Definer en ny rekke der det generelle leddet b_n er gitt ved $b_n = \ln(a_n)$.

c) Vis at den nye rekka er en aritmetisk rekke.

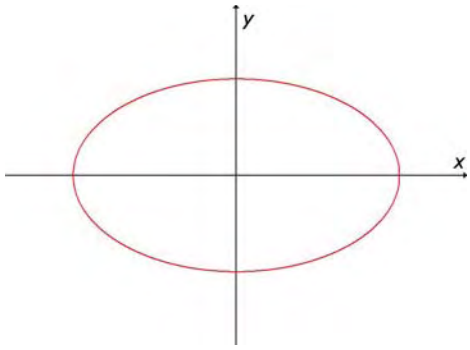
Vi vil nå undersøke om det du fant i c), gjelder generelt. Vi tar utgangspunkt i formelen for det generelle leddet i en geometrisk rekke.

d) Vis at dersom vi tar logaritmen til dette leddet, får vi formelen for det generelle leddet i en aritmetisk rekke.

Alternativ II

En ellipse med sentrum i origo er gitt ved

$$y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$$

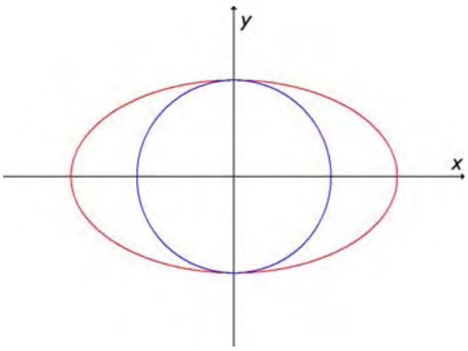


a) Finn skjæringspunktene mellom ellipsen og koordinataksene.

Dersom vi dreier den øvre halvdelen av ellipsen $360°$ om x-aksen, får vi en ellipsoide.
Vi ønsker å finne en formel for volumet av ellipsoiden.

b) Bruk formelen for volumet av et omdreiingslegeme til å vise at volumet av ellipsoiden er $V = \frac{4}{3}\pi ab^2$.

c) Bruk formelen for volumet av ellipsoiden til å finne volumet av en kule med radius r.



En kule er innskrevet i en ellipsoide. Se figuren til venstre.

d) Finn a uttrykt ved b slik at volumet av ellipsoiden er dobbelt så stort som volumet av kula.

Oppgave 5

En kurve K er gitt ved vektorfunksjonen $\vec{r}(t) = [\cos^3 t\ ,\ \sin^3 t]$ der $t \in \left[0\ ,\ \frac{\pi}{2}\right]$.

a) Tegn kurven K i et koordinatsystem. Velg 10 cm som enhet på aksene. Bestem skjæringspunktene mellom K og koordinataksene.

b) Finn $r'(t)$.

c) Vis at $\left|\vec{r}'(t)\right| = \frac{3}{2}\sin 2t$.

Sammen med koordinataksene avgrenser K et område i første kvadrant.

d) Finn omkretsen av området ved regning.

La $P\left(\cos^3 t\ ,\ \sin^3 t\right)$ være et vilkårlig punkt på K.

e) Forklar at en tangent i punktet P er gitt ved parameterframstillingen

$$
\begin{aligned}
x &= \cos^3 t - (3 \cdot \cos^2 t \cdot \sin t) \cdot s \\
y &= \sin^3 t + (3 \cdot \sin^2 t \cdot \cos t) \cdot s
\end{aligned}
$$

der s er parameteren.

Tangenten i P skjærer *x*- og *y*-aksen i henholdsvis A og B. Når P varierer langs K, vil dermed A og B variere langs koordinataksene. Det kan se ut som at alle disse linjestykkene AB har samme lengde.

f) Undersøk om dette er tilfelle.