Løsningsforslag
AA6524 Matematikk 3MX Elever - 05.12.2007
AA6526 Matematikk 3MX Privatister - 05.12.2007

Om løsningsforslaget

Løsningsforslaget for matematikk eksamen i 2MX er gratis, og det er lastet ned på eksamensoppgaver.org. Løsningen er myntet på elever og privatister som vil forbrede seg til eksamen i matematikk. Lærere må gjerne bruke løsningsforslaget i undervisningsøyemed, men virksomheter har ingen rett til å anvende dokumentet.

Løsningsforslagene skal utelukkende distribueres fra nettstedet eksamensoppgaver.org, da det er viktig å kunne føye til og rette eventuelle feil i ettertid. På den måten vil alle som ønsker det, til enhver tid finne det siste oppdaterte verket. eksamensoppgaver.org ønsker videre at flest mulig skal få vite om eksamensløsningene, slik at det finnes et eget nettsted hvor man kan tilegne seg dette gratis.

Dersom du sitter på ressurser du har mulighet til å dele med deg, eller ønsker å bidra på annen måte, håper eksamensoppgaver.org på å høre fra deg.

Innholdsfortegnelse

oppgave 1

a)

$$f(x) = \cos\left(x^2+1\right)$$

deriverer med kjerneregelen

$$f'(x) = \left(\cos\left(x^2+1\right)\right)' \cdot \left(x^2+1\right)'$$
$$f'(x) = -2x\sin\left(x^2+1\right)$$

b)

$$\sin x - \sqrt{3}\cos x = -2\sin x \qquad x \in [0, 2\pi\rangle$$

Skal løse likningen ved regning og oppgi svaret i eksakte verdier.

$$3\sin x - \sqrt{3}\cos x = 0$$

forutsetter at $\cos x \neq 0$

$$3 \cdot \frac{\sin x}{\cos x} - \sqrt{3} \cdot \frac{\cancel{\cos x}}{\cancel{\cos x}} = 0$$
$$3\tan x = \sqrt{3}$$
$$\tan x = \frac{\sqrt{3}}{3}$$
$$x = \arctan\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$
$$x = \frac{\pi}{6} + \pi k \qquad k \in \mathbb{Z}$$

og videre

$$x \in [0, 2\pi\rangle \implies k = \{0, 1\}$$
$$x_1 = \frac{\pi}{6} \qquad \vee \qquad x_2 = \frac{\pi}{6} + \pi = \frac{7\pi}{6}$$

c)

$$I = \int x \cdot \cos(3x)\,dx$$

Velger å løse dette uegentlige integralet ved delvis integrasjon

$$u' = \cos(3x) \implies u = \tfrac{1}{3}\sin(3x)$$

$$v' = 1 \implies v = x$$

begynner å integrere

$$I = \frac{1}{3}x\sin(3x) - \frac{1}{3} \cdot \int \sin(3x)\,dx$$

$$I = \frac{1}{3}x\sin(3x) - \frac{1}{3} \cdot (-\cos(3x))$$

Rydder opp litt

$$I = \frac{1}{3} \cdot \big(\sin(3x) + \cos(3x)\big)$$

d)

$$\int 2x \cdot e^{x^2+3}\,dx$$

Bruker denne substitusjonen

$$u = x^2 + 3 \implies \tfrac{du}{dx} = 2x$$

$$\int \frac{du}{\cancel{dx}} \cdot e^u \cdot \cancel{dx}$$

$$\int e^u\,du = e^u$$

som vi substituerer tilbake og smeller en konstant på.

$$\int 2x \cdot e^{x^2+3}\,dx = e^{x^2+3} + C$$

e)

Skriver om

$$f(x) = \sqrt{3}\sin x + 3\cos x$$

på formen

$$f(x) = A\sin(x+\phi)$$

Bestemmer amplidude

$$A = \sqrt{\left(\sqrt{3}\right)^2 + 3^2} = \sqrt{12} = 2\sqrt{3}$$

Finner dernest

$$\tan\phi = \frac{3}{\sqrt{3}}$$

$$\phi = \arctan\left(\frac{3}{\sqrt{3}}\right)$$

$$\phi = \frac{\pi}{3}$$

ergo

$$f(x) = 2\sqrt{3}\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$$

f)

Her tar vi stikkprøver fra en populasjonsandel på gresskar, dette er med andre ord ikke binomisk. Slenger inn verdiene i ‘STAT‘ på lommeregneren og summerer opp verdiene.

Setter X: ‘Vekten av et gresskar‘

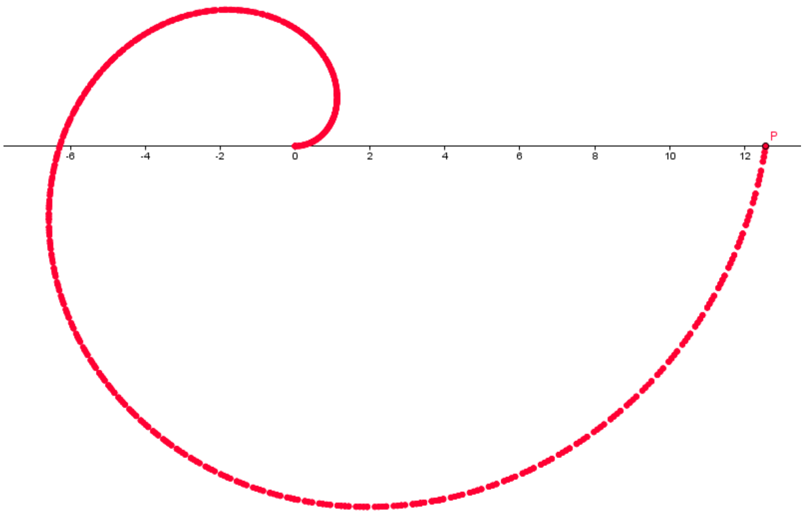
$$\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{8} X_i = 4.275$$

Her bruker vi empirisk standardavvik

$$S_{\overline{X}} = \sqrt{\frac{1}{n-1}\cdot\sum_{i=1}^{8}\left(X_i - \overline{X}\right)^2} \approx 1.327$$

g.1

Nedenfor har jeg skissert grafen til $r(\theta) = 2\theta$ for $\theta \in [0, 2\pi]$



g.2)

Når kurven krysser 1-aksen første gang, ser vi at $\theta = \pi$, mens andre gang er $theta = 2\pi$. Vi har dermed grensene

$$\alpha = \pi \qquad \beta = 2\pi$$

Vi får integralet

$$\frac{1}{2} \cdot \int_{2\pi}^{\pi} f(\theta)\, d\theta$$

Og da får vi:

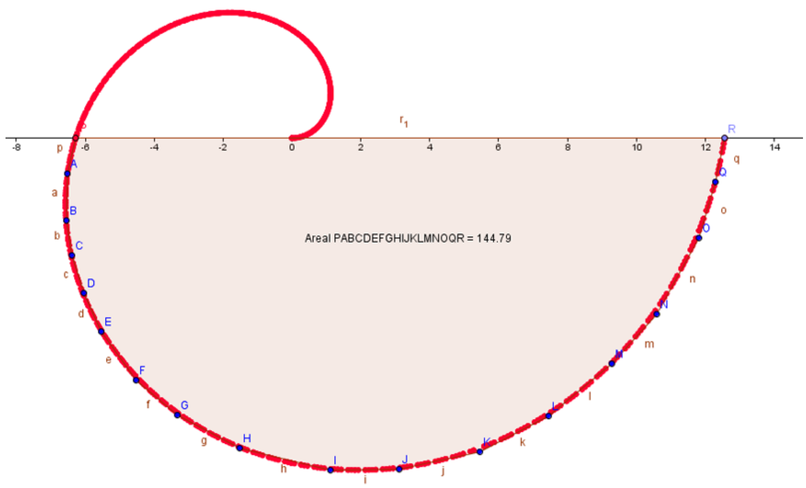
$$\frac{1}{2} \cdot \int_{2\pi}^{\pi} 4\theta^2\, d\theta = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot \frac{1}{3} \cdot \theta^3 \Big|_{2\pi}^{\pi} = \frac{2}{3}\theta^3 \Big|_{2\pi}^{\pi} =$$

$$\left(\frac{2}{3} \cdot \pi^3\right) - \left(\frac{2}{3} \cdot (2\pi)^3\right) = \frac{2\pi^3}{3} - \frac{16\pi^3}{3} = -\frac{14\pi^3}{3}$$

Siden dette er areal, kan vi ignorere fortegnet. Da får vi:

$$\frac{14\pi^3}{3} \approx 144.7$$

Av illustrasjonen nedenfor har jeg brukt geogebra til å finne tilnærmet areal under 1.-aksen. Det stemmer godt! Hurra! :D



oppgave 2

a)

Finner perioden

$$P = \frac{2\pi}{c} \quad \Rightarrow \quad P = \frac{2\pi}{0.785} \approx 8.004$$

og antall insekter den 1. juni

$$I(0) = 4000 \cdot \sin(0.785) + 10000 \approx 12850$$

er ca 12850 insekter.

b)

Her kan vi utnytte egenskapene til sinusfunksjonen. Dersom dette var en sinusfunksjon med amplidude 1 som varierte med førsteaksen som likevektslinje, så ville funksjonen hatt størst utslag når $\sin(0.785t + 0.785) = 1$ og minst når den var lik -1. Derfor kan vi løse denne oppgaven slik jeg har gjort nedenfor.
Først finner jeg det minste antall insekter

$$f(x) = 4000 \cdot (-1) + 10000 = 6000$$

og mest innsekter er

$$f(x) = 4000 \cdot 1 + 10000 = 14000$$

c)

Perioden først

$$P_{I(t)} = P_{R(t)} \approx 8.004 \implies c = 0.785$$

Vi får også vite at

- Minst antall innsekter: 170
- Størst antall innsekter: 5830

$$A = \frac{R_{\text{maks}} - R_{\text{min}}}{2} = \frac{5830 - 170}{2} = 2830$$

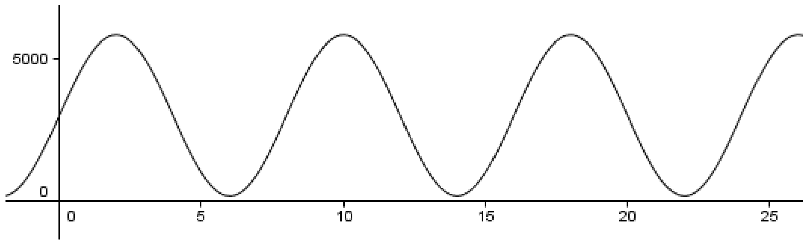
og likevektslinja d

$$d = \frac{R_{\text{maks}} + R_{\text{min}}}{2} = \frac{5830 + 170}{2} = 3000$$

Da har vi funnet at

$$R(t) = 2830 \sin(0.785t) + 3000$$

Nedenfor ser du grafen for $t \in [0, 25\rangle$



d)

$$P(t) = I(t) - R(t)$$

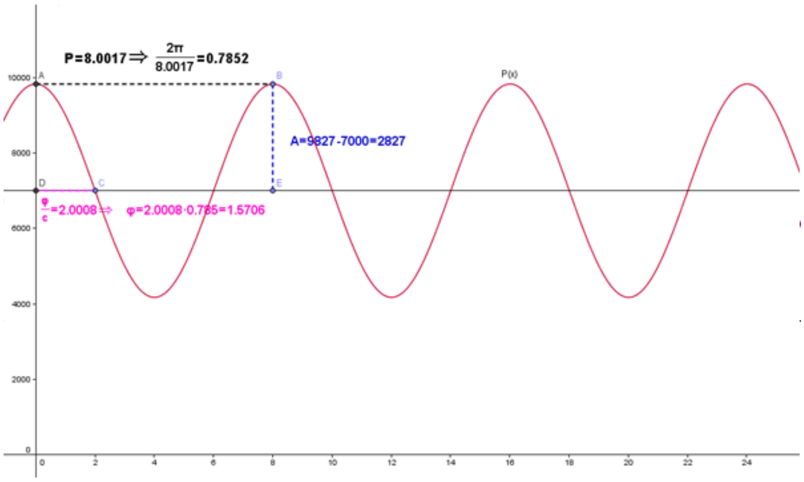
$$P(t) = \big(4000 \sin(0.785t + 0.785) + 10000\big) - \big(2830 \sin(0.785t) + 3000\big)$$

$$P(t) = 4000 \sin(0.785t + 0.785) - 2830 \sin(0.785t) + 7000$$

Tegner ikke grafen her. Den kommer i neste deloppgave.

e)

Jeg tegner denne grafen alene, da budskapet kommer tydeligere frem slik.



Vi ser at uttrykket blir

$$P(t) = 2827 \cdot \sin(0.785t + 1.571) + 7000$$

Men som en digresjon vil jeg regne ut grafen også. Bruker at

$$\sin(u \pm v) = \sin u \cdot \cos v \pm \cos u \cdot \sin v$$

og får

$$4000 \sin(0.785t+0.785) = 4000 \cdot \big(\sin(0.785t) \cdot \cos(0.785) + \cos(0.785t) \cdot \sin(0.785) \big)$$

$$4000 \sin(0.785t + 0.785) \approx 2830 \sin(0.785t) + 2827 \cos(0.785t)$$

som jeg setter inn i $P(t)$

$$P(t) = 2830 \sin(0.785t) + 2827 \cos(0.785t) - 2830 \sin(0.785t) + 7000$$

$$P(t) = 2827 \cos(0.785t) + 7000$$

Vi vet at grafen til $\cos x$ er forskjøvet med $\frac{\pi}{2} \approx 1.571$ til venstre for $\sin x$, dermed blir funksjonsuttrykket

$$P(t) = 2827 \cdot \sin(0.785t + 1.571) + 7000$$

Ikke verst!

oppgave 3

Vi har altså standardavviket $\sigma = 6$ og $\mu = 55$, så kaller vi X : 'Hvilepulsen til en tilfeldig valgt, men godt trent mann.'

a)

Bruker min Casio fx-9750G Plus og går inn i 'STAT' velger 'DIST' så 'NORM' og til slutt 'Ncd'. I menyen setter jeg inn:

- Lower: 0
- Upper: 50
- $\sigma : 6$
- $\mu : 55$

Trykker deretter 'execute' og finner sannsynligheten.

$$P(X < 50) \approx 0.202$$

Altså 20.2% sannsynlighet.

b)

Beholder verdiene for μ og σ, men plotter nå

- Lower: 0
- Upper: 62

Da har vi:

$$P(X > 62) = 1 - P(X < 62) = 1 - 0.87832 \approx 0.122$$

Altså 12.2% sannsynlighet for at den tilfeldig valgte mannen har en hvilepuls som er mer enn 62.

c)

Igjen endrer vi verdiene, denne gangen setter vi

- Lower: 43
- Upper: 67

$$P(43 < X < 63) \approx 0.954$$

altså 95.4% sjans for at mannens hvilepuls ligger i dette intervallet.

d)

Så derfinerer de topptrente menn som 5% av andelen av godt trente menn som har lavest hvilepuls, og spør hvilken hvilepuls en mann må ha for å kunne kalle seg topptrent. - Det betyr at X må være større enn en hvilepuls A. Vi skal finne A.

$$P(X > A) = 0.05$$

da får vi

$$\frac{A - 55}{6} = 0.05$$

For sannsynligheten 0.05 leser vi av tabellen og skriver om høyresiden til

$$\frac{A - 55}{6} = -1.64$$

$$A = (-1.64 \cdot 6) + 55 \approx 45$$

Da må en mann altså ha hvilepuls på maks 45 for å kunne kalle seg topptrent.

oppgave 4 - alternativ I

a)

Vi skal forklare at rekka er geometrisk, så da kan vi jo begynne med å finne kvotienten.

$$k = \frac{e^9}{e^{10}} = \ldots = \frac{e^1}{e^2} = \frac{1}{e}$$

rekka er gitt ved

$$a_n = a_1 \cdot k^{n-1}$$

der $a_1 = e^{10}$

$$a_n = e^{10} \cdot \frac{1}{e^{n-1}} = \frac{e^{10}}{e^{n-1}}$$

Denne rekka er geometrisk fordi det finnes en kvotient.

b)

Vi ser at

$$k = \frac{1}{e} \approx 0.37 \quad \Longrightarrow \quad -1 < k < 1$$

derfor konvergerer rekka.

$$S = \frac{e^{10}}{1 - e^{-1}} \approx 34845.36$$

c)

I a) fant vi at

$$a_n = \frac{e^{10}}{e^{n-1}}$$

og definerer den nye rekka som

$$b_n = \ln\left(\frac{e^{10}}{e^{n-1}}\right)$$

Vi kan vise at b_n er ei aritmetisk rekke slik

$$b_n = \ln\left(e^{10}\right) - \ln\left(e^{n-1}\right)$$

$$b_n = 10\ln(e) - (n-1)\cdot\ln(e)$$

Vi vet selvfølgelig at $\ln e = 1$ og dermed

$$b_n = 10 - n + 1$$

$$b_n = 11 - n$$

d)

Her vil vi vise at ved å ta utgangspunkt i den generelle formelen for ei geometrisk rekke

$$a_n = a_1 \cdot k^{n-1} \tag{1}$$

og vi vil nå bruke den naturlige logaritmen på (1) for å vise at vi finner

$$a_n = a_1 + (n-1) \cdot d \tag{2}$$

(2) som er formelen for det generelle leddet i ei aritmetisk rekke. Altså;

$$\begin{aligned} a_n &= \ln\left(a_1 \cdot k^{n-1}\right) \\ a_n &= \ln\left(a_1\right) + \ln\left(k^{n-1}\right) \\ a_n &= \ln\left(a_1\right) + (n-1) \cdot \ln(k) \end{aligned}$$

Og vi vet selvfølgelig at $\ln\left(a_1\right)$ og $\ln(k)$ begge er konstanter. Dermed har vi vist at ved å ta logaritmen til (1) finner vi (2).

oppgave 4 - alternativ II

a)

$$y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$$

Når den skjærer x-aksen, så er $y = 0$

$$\pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2} = 0$$

$$\pm\sqrt{a^2 - x^2} = 0$$

$$x = \pm a$$

og da følger det også at den skjærer andreaksen når $x = 0$

$$y = \pm\frac{b}{a}\cdot\sqrt{a^2 - 0^2} = \pm\frac{b}{a}\cdot\sqrt{a^2} = \pm\frac{ab}{a} = \pm b$$

b)

I a) fant vi at den skjærer førsteaksen for $x = \pm a$

$$V = \pi\cdot\int_{-a}^{a}\left(\frac{b}{a}\cdot\sqrt{a^2 - x^2}\right)^2\,dx$$

Pga symmetri, kan vi multiplisere integralet med 2 og endre nedre grense til 0. Da blir det fortere gjort å løse det.

$$V = 2\pi\cdot\int_{0}^{a}\left(\frac{b^2\cdot(a^2 - x^2)}{a^2}\right)\,dx$$

Rydder litt opp litt

$$V = 2\pi\cdot\int_{0}^{a}\left(\frac{b^2a^2}{a^2} - \frac{b^2x^2}{a^2}\right)\,dx = 2\pi\cdot\int_{0}^{a}\left(b^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2\right)\,dx$$

og løser

$$V = 2\pi\int\left(b^2 - \frac{b^2}{a^2}x^2\right)\,dx = 2\pi\cdot\left[b^2x - \frac{b^2}{a^2}\cdot\frac{1}{3}x^3\right]_0^a =$$

$$2\pi\cdot\left(b^2\cdot a - \frac{b^2}{3a^2}\cdot a^3\right) - 0 = 2\pi\cdot b^2a - \frac{2\pi\cdot b^2\cdot a^3}{3a^2} =$$

$$2\pi b^2a - \frac{2}{3}\pi b^2a = \frac{6\pi b^2a - 2\pi b^2a}{3}$$

og da står vi igjen med

$$V = \frac{4}{3}\pi ab^2$$

c)

Ei kule som er innskrevet i en ellipsoide, vil ha samme sentrum som ellipsoiden, og dermed vil de også ha samme tverrsnitt. Ergo, kan vi bruke at radien $r = b$ i kula er lik i alle retninger, altså $r = a = b$

$$V_2 = \frac{4}{3}\pi b \cdot b^2 = \frac{4}{3}\pi b^3$$

og siden $r = b$

$$V_2 = \frac{4}{3}\pi r^3$$

d)

Setter

$$\frac{V}{V_2} = 2$$

og løser likningen nedenfor med hensyn på a

$$\frac{\frac{4\pi ab^2}{3}}{\frac{4\pi b^3}{3}} = 2$$

$$\frac{12\pi ab^2}{12\pi b^3} = 2$$

stryker de som er felles

$$\frac{\cancel{12\pi} \cdot a \cdot \cancel{b^2}}{\cancel{12\pi} \cdot \cancel{b^3}} = 2$$

og da står vi igjen med

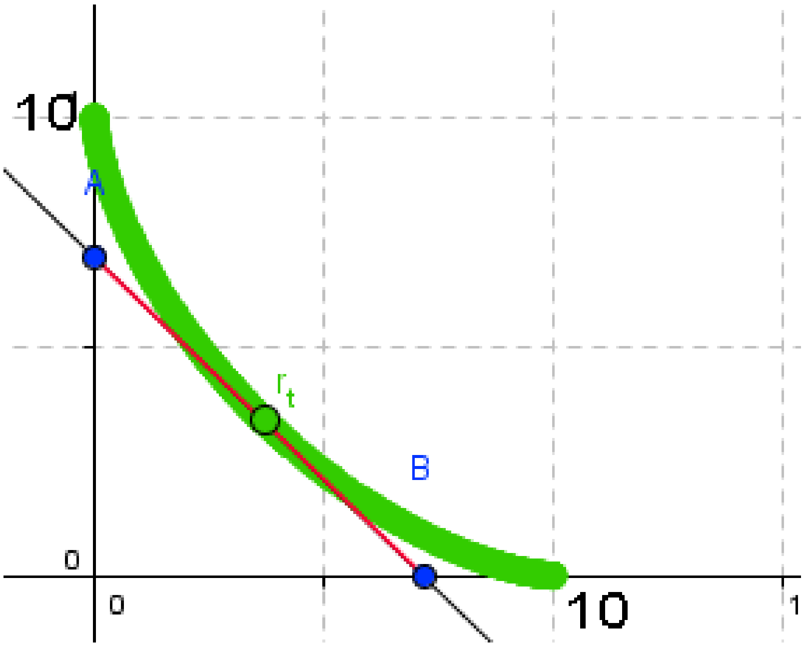
$$\frac{a}{b} = 2$$

$$a = 2b$$

enkelt og greit, hehe :)

oppgave 5

a)



b)

$$\vec{r}'(t) = \left[\left(\cos^3 t\right)' \cdot (\cos t)',\ \left(\sin^3 t\right)' \cdot (\sin t)'\right]$$

$$\vec{r}'(t) = \left[-3\cos^2 t \cdot \sin t,\ 3\sin^2 t \cdot \cos t\right]$$

c)

$$\left|\vec{r}'(t)\right| = \sqrt{(-3\cos^2 t \cdot \sin t)^2 + \left(3\sin^2 t \cdot \cos t\right)^2}$$

Tar meg av radikanden alene, fordi det blir litt mer oversiktlig.

$$9\cos^4 t \cdot \sin^2 t + 9\sin^4 t \cdot \cos^2 t$$

$$9 \cdot \left(\cos^4 t \cdot \sin^2 t + \sin^4 t \cdot \cos^2 t\right)$$

Trekker ut felles faktorer

$$9 \cdot \cos^2 t \cdot \left(cos^2 t + \sin^2 t\right) \cdot \sin^2 t$$

bruker identiteten på det røde i uttrykket.

$$9 \cdot \cos^2 t \cdot \sin^2 t$$

Slenger dette tilbake under rottegnet

$$\left|\vec{r}'(t)\right| = \sqrt{9 \cdot \cos^2 t \cdot \sin^2 t}$$

$$\left|\vec{r}'(t)\right| = 3 \cdot \cos t \cdot \sin t$$

og her kan vi bruke nok en identitet, for vi vet jo at $\sin(2t) = 2\sin t \cdot \cos t$, denne skriver vi om

$$\sin(2t) = 2\sin t \cdot \cos t$$

$$\frac{1}{2}\sin(2t) = \sin t \cdot \cos t$$

Og substituerer dette i vårt uttrykk

$$\left|\vec{r}'(t)\right| = 3 \cdot \frac{1}{2}\sin(2t) = \frac{3}{2}\sin(2t)$$

og da var vi i mål :)

d)

Buelengden er

$$s = \frac{3}{2} \cdot \int_0^1 \sin(2t)\,dt = -\frac{3}{4}\cos(2t)\Big|_0^1 \approx 1.06\Big| \cdot 10 = 10.6$$

i tillegg har vi de to sidene. Disse går i x- og y-retningen, og er begge $1 \cdot 10 = 10$. Alle enhetene blir multiplisert med 10, fordi vi innledningsvis ble bedt om å velge 10 cm som enhet på aksene.

$$O = 10.6 + 10 + 10 = 30.6\text{cm}$$

e)

I parameterfremstillingen

$$\ell : \begin{cases} x = \cos^3 t - \left(3 \cdot \cos^2 t \cdot \sin t\right) \cdot s \\ y = \sin^3 t + \left(3 \cdot \sin^2 t \cdot \cos t\right) \cdot s \end{cases}$$

angir leddet i blått det vilkårlige punktet P på kruven, mens leddet markert i rødt er den deriverte til dette punktet. Merk at leddene er tall, og kun inneholder variabelen t fordi de er fremstilt på generell form. Så fort P er eksplisitt definert, vil s være parameteren.

f)

Vi har likningssettet

$$x = \cos^3 t - \big(3 \cdot \cos^2 t \cdot \sin t\big) \cdot s \tag{3}$$

$$y = \sin^3 t + \big(3 \cdot \sin^2 t \cdot \cos t\big) \cdot s \tag{4}$$

Bestemmer A ved å sette $y = 0$ i (4) og løser med hensyn på s

$$\begin{aligned} 0 &= \sin^3 t + \big(3 \cdot \sin^2 t \cdot \cos t\big) \cdot s \\ s &= \frac{-\sin^3 t}{3 \cdot \sin^2 t \cdot \cos t} \\ &= \frac{-\sin t}{3 \cos t} \end{aligned}$$

setter inn for s i (3) og løser med hensyn på x.

$$\begin{aligned} x &= \cos^3 t - \big(3 \cdot \cos^2 t \cdot \sin t\big) \cdot \frac{(-\sin t)}{3 \cos t} \\ &= \cos^3 t + \frac{3 \cos^2 t \cdot \sin^2 t}{3 \cos t} \\ &= \cos^3 t + \frac{\cancel{3} \cos^{\cancel{2}} \cdot \sin^2 t}{\cancel{3 \cos t}} \\ &= \cos^3 t + \cos t \cdot \sin^2 t \\ &= \cos^3 t + \cos t \cdot \big(1 - \cos^2 t\big) \\ &= \cos^3 t + \cos t - \cos^3 t \\ &= \cos t \end{aligned}$$

Da har vi funnet at $A(\cos t, 0)$. Nå vil vi finne B, setter $x = 0$ i (3) og løser det med hensyn på s, da får vi

$$\begin{aligned} 0 &= \cos^3 t - \big(3 \cdot \cos^2 t \cdot \sin t\big) \cdot s \\ s &= \frac{\cos t}{3 \sin t} \end{aligned}$$

og setter så inn for s i (4) og løser med hensyn på y

$$\begin{aligned} y &= \sin^3 t + \big(3 \cdot \sin^2 t \cdot \cos t\big) \cdot \frac{\cos t}{3 \sin t} \\ &= \sin^3 t + \sin t \cdot \cos^2 t \\ &= \sin^3 t + \sin t \cdot \big(1 - \sin^2 t\big) \\ &= \sin^3 t + \sin t - \sin^3 t \\ &= \sin t \end{aligned}$$

og dermed har vi $B(0, \sin t)$. Da blir det en smal sak å finne lengden av linjestykket $\overline{AB}$

$$\begin{aligned}|\overline{AB}| &= \sqrt{(0-\cos t)^2 + (\sin t - 0)^2} \\ &= \sqrt{\cos^2 t + \sin^2 t} \\ &= \sqrt{1} \\ &= 1\end{aligned}$$

Da har vi bevist at avstanden **alltid** er 1. Her er også en illustrasjon av dette:

Dersom du er interessert, finner du flere løsningsforslag på eksamensoppgaver.org

SLUTT