Løsningsforslag
AA6516 Matematikk 2MX Privatister
10. desember 2003

eksamensoppgaver.org

Om løsningsforslaget

Løsningsforslaget for matematikk eksamen i 2MX er gratis, og det er lastet ned på eksamensoppgaver.org. Løsningen er myntet på elever og privatister som vil forbrede seg til eksamen i matematikk. Lærere må gjerne bruke løsningsforslaget i undervisningsøyemed, men virksomheter har ingen rett til å anvende dokumentet.

Løsningsforslagene skal utelukkende distribueres fra nettstedet eksamensoppgaver.org, da det er viktig å kunne føye til og rette eventuelle feil i ettertid. På den måten vil alle som ønsker det, til enhver tid finne det siste oppdaterte verket. eksamensoppgaver.org ønsker videre at flest mulig skal få vite om eksamensløsningene, slik at det finnes et eget nettsted hvor man kan tilegne seg dette gratis.

Dersom du sitter på ressurser du har mulighet til å dele med deg, eller ønsker å bidra på annen måte, håper eksamensoppgaver.org på å høre fra deg.

Innholdsfortegnelse

oppgave 1

a.1.I)

$$
\begin{aligned}
2e^x &= 7 \\
e^x &= \frac{7}{2} \\
\ln e^x &= \ln\left(\frac{7}{2}\right) \\
x &= \ln 7 - \ln 2
\end{aligned}
$$

a.1.II)

$$
\begin{aligned}
\ln x^2 - \ln x &= 2 \\
2\ln x - \ln x &= 2 \\
\ln x &= 2 \\
x &= e^2
\end{aligned}
$$

a.2.I)

$$
\cos x = 0.8 \qquad\qquad x \in [0^\circ,\ 360^\circ]
$$

$$
x = \arccos(0.8)
$$

$$
x_1 \approx 36.9^\circ \qquad \vee \qquad x_2 \approx 360^\circ - 36.9^\circ
$$

$$
x_1 \approx 36.9^\circ \qquad \vee \qquad x_2 \approx 323.1^\circ
$$

a.2.II)

$$
2\sin^2 x - 3\sin x - 2 = 0 \qquad\qquad x \in [0^\circ,\ 360^\circ]
$$

Løser denne med abc-formelen

$$
\begin{aligned}
\sin x &= \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-2)}}{2 \cdot 2} \\
&= \frac{3 \pm \sqrt{9 + 16}}{4} \\
&= \frac{3 \pm 5}{4} \\
&= -\frac{1}{2} \qquad \vee \qquad 2 \\
x &= \arcsin\left(-\frac{1}{2}\right) \qquad \vee \qquad \cancel{\arcsin(2)} \text{ ingen løsning} \\
&= -30^\circ \\
&= 360^\circ - 30^\circ \qquad \vee \qquad 180^\circ + 30^\circ \\
&= 330^\circ \qquad \vee \qquad 210^\circ
\end{aligned}
$$

b.1.I)

$$f(x) = 3x^3 - x$$

deriverer

$$f'(x) = 3 \cdot 3x^2 - 1$$
$$f'(x) = 9x^2 - 1$$

b.1.II)

$$g(x) = (x^2 - 2)^4$$

deriverer ved å bruke kjerneregelen

$$\begin{aligned} g'(x) &= \left(\left(x^2 - 2\right)^4\right)' \cdot \left(x^2 - 2\right)' \\ &= 4 \cdot \left(x^2 - 2\right)^3 \cdot 2x \\ &= 8x \left(x^2 - 2\right) \end{aligned}$$

b.2.I)

$$h(x) = x \cdot \ln x$$

deriverer med produktregelen

$$\begin{aligned} h'(x) &= (x)' \cdot \ln x + x \cdot (\ln x)' \\ &= \ln x + \cancel{x} \cdot \frac{1}{\cancel{x}} \\ &= \ln x + 1 \end{aligned}$$

b.2.II)

$$k(x) = 3x \cdot e^{-2x}$$

deriverer med produkt- og kjerneregelen

$$\begin{aligned} k'(x) &= 3 \cdot (x)' \cdot e^{-2x} + 3x \cdot \left(e^{-2x}\right)' \cdot (-2x)' \\ &= 3e^{-2x} + 3 \cdot (-2) \cdot e^{-2x} \\ &= 3e^{-2x} - 6e^{-2x} \\ &= (1-2)3e^{-2x} \end{aligned}$$

c.1.I)

$$\int_0^5 \frac{1}{2}x^3 \, dx = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot x^4 \bigg|_0^5 = \frac{1}{8}x^4 \bigg|_0^5 = \frac{1}{8} \cdot 5^4 = \frac{625}{8}$$

c.1.II)

$$\int_{-1}^{2} 2^x \, dx = \left. \frac{2^x}{\ln 2} \right|_{-1}^{2} = \frac{2^2}{\ln 2} - \frac{2^{-1}}{\ln 2} = \frac{4}{\ln 2} - \frac{1}{2\ln 2} = \frac{7}{\ln 4}$$

c.2.I)

$$\int \frac{2}{x} \, dx = 2 \cdot \int \frac{1}{x} = 2 \ln |x| + C$$

c.2.II)

$$\int \left(e^{2x} - e^{-2x}\right) \, dx =$$

$$\int e^{2x} \, dx - \int e^{-2x} \, dx = \frac{1}{2} e^{2x} - \left(-\frac{1}{2}\right) e^{-2x} = \frac{e^{2x}}{2} + \frac{1}{e^{2x}} = \frac{e^{4x} + 2}{2e^{2x}} + C$$

d.I)

$$\vec{v} = [-4, b] \qquad \vec{u} = [3, 5]$$
$$[-4, b] \cdot [3, 5] = 0$$
$$-12 + 5b = 0$$
$$b = \frac{12}{5}$$

dermed har vi bestemt b slik at

$$\vec{v} \perp \vec{u}$$

d.II)

Vi vil at

$$\vec{v} \parallel \vec{u}$$

da kan vi sette

$$\frac{3b}{3} = \frac{b^2}{5}$$

kryssmultipliserer

$$5 \cdot 3b = 3b^2$$
$$15b = 3b^2$$
$$3b^2 - 15b = 0$$
$$3b(b - 5) = 0$$
$$b = 0 \qquad \vee \qquad b = 5$$

Vi ser at løsningene for b er 5 og 0. Som vi vet står $\vec{0}$ normalt på, og er parallell med alle vektorer.

e.I)

Vi bruker sinussetningen. Da finner vi at

$$\frac{AB}{\sin \angle C} = \frac{BC}{\sin \angle A} \quad \Rightarrow \quad AB = \frac{BC \cdot \sin \angle C}{\sin \angle A}$$

Setter inn verdier og finner at

$$AB = \frac{7.1 \cdot \sin(102^\circ)}{\sin(42^\circ)} \approx 10.4$$

vi har da funnet at AB er 10.4 cm.

e.II)

Arealet av en trekant er gitt ved

$$A = \frac{1}{2} \cdot bc \cdot \sin A$$

Dermed er

$$\frac{1}{2} \cdot bc \cdot \sin A = \frac{1}{2} \cdot ac \cdot \sin B = \frac{1}{2} \cdot ab \cdot \sin C$$

så

$$\frac{1}{2} \cdot bc \cdot \sin A = \frac{1}{2} \cdot ac \cdot \sin B$$

videre multipliserer jeg begge sidene i denne likninga

$$\frac{1}{2} \cdot bc \cdot \sin A \cdot \frac{2}{abc} = \frac{1}{2} \cdot ac \cdot \sin B \cdot \frac{2}{abc}$$

og står igjen med

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b}$$

og dermed

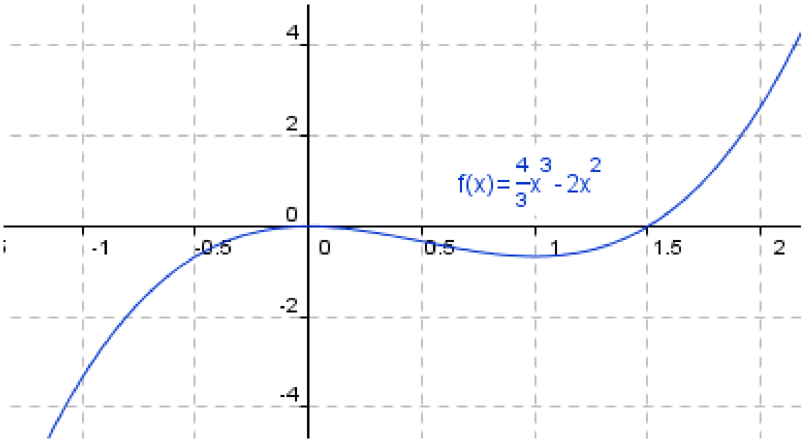
$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}$$

som vi også kan skrive

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$$

oppgave 2

a)



b)

Vi har funksjonen

$$f(x) = \frac{4}{3}x^3 - 2x^2$$

og skal finne koordinatene til ekstremalpunktene på grafen. Det kan vi gjøre ved å derivere funksjonen, sette den lik null og finne x-verdiene.

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{4}{3} \cdot \left(x^3\right)' - 2 \cdot \left(x^2\right)' \\ &= \frac{4}{3} \cdot 3 \cdot x^2 - 2 \cdot 2 \cdot x \\ &= 4x^2 - 4x \\ f'(x) &= 0 \\ 4x^2 - 4x &= 0 \\ 4x(x-1) &= 0 \\ x &= 0 \qquad \vee \qquad 1 \end{aligned}$$

dermed har vi funnet x-verdiene 0 og 1. Setter disse inn i $f(x)$ og da har vi også y-verdiene.

$$f(0) = 0$$

$$f(1) = \frac{4}{3} \cdot 1^3 - 2 \cdot 1^2 = \frac{4}{3} - 2 = -\frac{2}{3}$$

Vi ser at

$$f(0) > f(1)$$

altså er $f(0)$ et toppunkt og $f(1)$ et bunnpunkt. Da har vi $T(0,0)$ og $B\left(1, -\frac{2}{3}\right)$

c)

Dobbeltderiverer $f(x)$

$$\begin{aligned} f''(x) &= 4 \cdot \left(x^2\right)' - 4 \cdot (x)' \\ &= 4 \cdot 2 \cdot x - 4 \cdot 1 \\ &= 8x - 4 \end{aligned}$$

og deretter setter vi

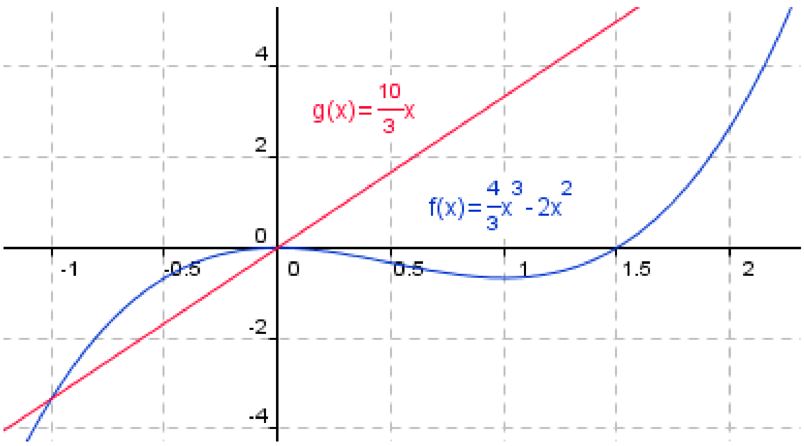
$$f''(x) = 0$$
$$8x - 4 = 0$$
$$x = \frac{1}{2}$$

som gir den momentane veksthastigheten

$$f'\left(\frac{1}{2}\right) = 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 4 \cdot \left(\frac{1}{2}\right) = 4 \cdot \frac{1}{4} - \frac{4}{2} = 1 - 2 = -1$$

Den momentane vekstfarten er altså -1 i dette punktet.

d)



e)

Vi ser av grafen i d) at skjæringspunktene mellom grafene er $x = -1$ og $x = 0$. Vi ser også at $f(x) > g(x)$ i intervallet, derfor setter vi

$$\int_{-1}^{0} \big(f(x) - g(x)\big)\, dx = \int_{-1}^{0} \left(\frac{4}{3}x^3 - 2x^2 - \frac{10}{3}x\right)\, dx$$

Regner ut integralet

$$\int_{-1}^{0} \left(\frac{4}{3}x^3 - 2x^2 - \frac{10}{3}x\right)\, dx = \frac{4}{12}x^4 - \frac{2}{3}x^3 - \frac{10}{6}x^2 \bigg|_{-1}^{0}$$

evaluerer grensene

$$0 - \left(\frac{4}{12} \cdot (-1)^4 - \frac{2}{3} \cdot (-1)^3 - \frac{10}{6} \cdot (-1)^2\right) = -\left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3} - \frac{5}{3}\right) = \frac{2}{3}$$

oppgave 3

a)

Vi er gitt punktene $A(0,0)$, $B(15,4.5)$ og $C(30,0)$. Disse verdiene plotter jeg inn under 'STAT' på min Casio fx-9750G Plus. Ved regresjon finner jeg at

$$y = ax^2 + bx + c \begin{cases} a &= -0.02 \\ b &= 0.6 \\ c &= 0 \end{cases}$$

Vi har altså funnet andregradsfunksjonen

$$f(x) = -0.02x^2 + 0.6x \qquad\qquad x \in [0,30]$$

b)

Siden karmen over vinduene øverst ligger 2.7 meter over det høyeste punktet på buen, og det høyeste punktet er $B(15,4.5)$, så vil karmen beskrives av linja

$$y = 7.2$$

Vi vet at

$$y \ > \ f(x) \qquad\qquad x \in [0,30]$$

og dermed har vi integralet

$$\int_0^{30} (y - f(x))\ dx$$

Løser dette integralet

$$\int_0^{30} \left(0.02x^2 - 0.06x + 7.2\right)\ dx = \left[\frac{0.02}{3}x^3 - \frac{0.6}{2}x^2 + 7.2x\right]_0^{30} =$$

$$\left(\frac{0.02 \cdot (30)^3}{3} - \frac{0.6 \cdot (30)^2}{2} + 7.2 \cdot 30\right) - 0 = 180 - 270 + 216 = 126$$

Arealet som skal males er 126m^2.

c)

De trenger hele

$$\frac{126}{5} = 25.2$$

25.2 liter maling. Da blir det billigst å kjøpe

- 2 stk 10 litere â 2000 kr
- 1 stk 5 litere â 1100 kr
- 1 stk 1 litere à 400 kr

$$2000 \cdot 2 + 1100 + 400 = 5500$$

som koster 5500 kroner.

oppgave 4

a)

At man kun tipper ett utfall (H, B, U) per kamp (12 stk) i rekken. Dessuten må sannsynligheten være lik for utfallet. Dvs at sannsynligheten er like stor for hjemmeseier (H), borteseier (B) og uavgjort (U). - I virkeligheten er dette ikke sannsynlig!

b)

Innfører den stokastiske variabelen $X =$ 'antall rette'.

$$P(X = 10) = \binom{12}{10} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{10} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{2} = 66 \cdot \frac{1 \cdot 2^2}{3^{10} \cdot 3^2} = \frac{264}{3^{12}} \approx 0.0005$$

altså hele 0.05% WOW! hehehe :)

c)

Denne kan vi gjøre på flere måter. Blant annet ved å bruke kalkulatoren. Ved å skrive inn uttrykket

$$\binom{12}{x} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{x} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{12-x}$$

i kalkulatoren, og bruke tabellfunksjonen, ser vi at

$$P(X = 4) > P(X = x)$$

altså er sannsynligheten størst for fire rette på ei rekke.

$$P(X = 4) \approx 0.2384$$

Den sannsynligheten er på circa 23.84%.

d)

Tippekongen hevder han kan få gevinst (sannsynligheten er da 1) på hver femte enkelrekke han spiller på, altså 1/5 av alle rekker han spiller. Videre vet vi at gevinst gis ved 10, 11 eller 12 rette. Vi vil finne sannsynligheten per enkeltkamp, p. Setter opp likninga

$$\binom{12}{12} \cdot (p)^{12} \cdot (1-p)^0 + \binom{12}{11} \cdot (p)^{11} \cdot (1-p)^1 + \binom{12}{10} \cdot (p)^{10} \cdot (1-p)^2 = 1 \cdot 15$$

Forenkler litt, og får

$$p^{12} + 12p^{11} \cdot (1-p) + 66p^{10} \cdot (1-p)^2 = 0.20$$

løser så denne likningen grafisk på lommeregneren og finner at

$$p \approx 0.677$$

altså ca 67.7%(!)

oppgave 5

a)

Vi får oppgitt linja ℓ slik

$$\ell : \begin{cases} x = 5 - t \\ y = \frac{1}{3}t \end{cases}$$

Og vi vet at grafen vil skjære x-aksen når y-koordinaten er null og motsatt. Setter $x = 0$ og regner ut y

$$0 = 5 - t \qquad \Rightarrow \qquad t = 5$$

setter inn for t og regner ut y

$$y = \frac{1}{3} \cdot 5 = \frac{5}{3}$$

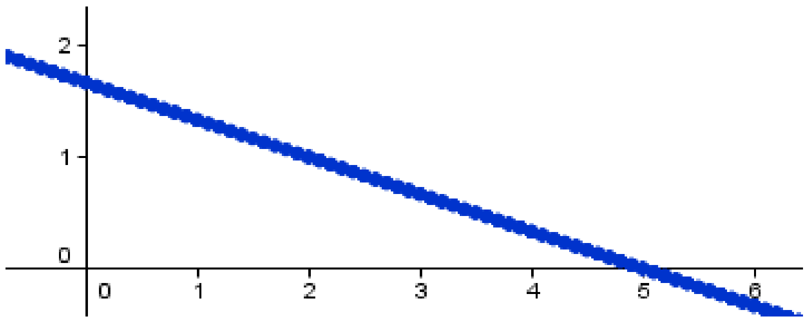
Videre fortsetter vi for å finne skjæringspunktet for ℓ og x-aksen

$$0 = \frac{1}{3}t \qquad \Rightarrow \qquad t = 0$$

det gir

$$x = 5 - 0 = 5$$

dermed har vi funnet skjæringspunktene $S_x(5, 0)$ og $S_y\left(0, \frac{5}{3}\right)$.



b)

Vi har to punktet $A(2, 2)$ og $B(5, 0)$, vektoren $\overrightarrow{AB}$ beskriver lengde og retning fra A til B. For å finne denne lengden og retningen, kan vi sette

$$\overrightarrow{AB} = [5 - 2, 0 - 2] = [3, -2]$$

altså må vi gå 5 enheter til høyre i x-retningen og 2 enheter vertikalt i y-retningen. Lengden av $\overrightarrow{AB}$ finner vi slik:

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{3^2 + (-2)^2} = \sqrt{9 + 4} = \sqrt{13}$$

c)

Linja ℓ har retningsvektoren;

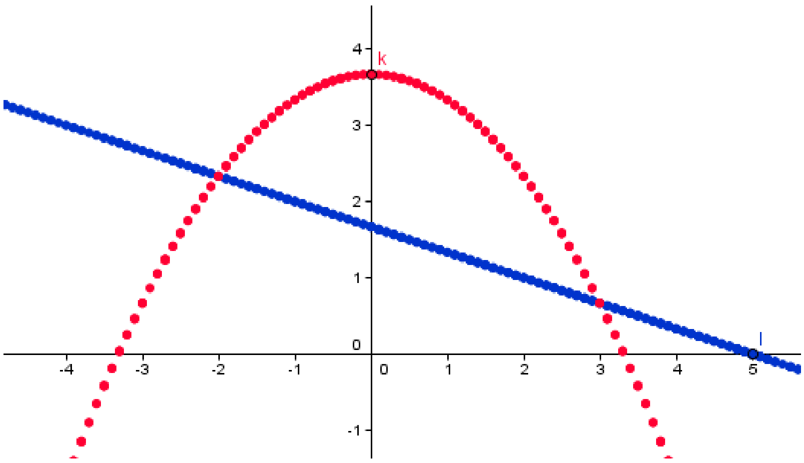
$$\vec{r} = \left[-1, \frac{1}{3}\right]$$

Vi bruker skalarproduktet til vektorene for å avgjøre om de er ortagonale.

$$\vec{r} \cdot \overrightarrow{AB} = \left[-1, \frac{1}{3}\right] \cdot [3, -2] = -3 + \left(-\frac{2}{3}\right) \neq 0$$

nei, de står ikke vinkelrett på hverandre, fordi skalarproduktet ikke er null.

d)



e)

For å finne skjæringspunktene mellom linjene ℓ og k, må vi sette $\ell = k$.

$$5 - t = s$$

setter inn for s i likningen for y-komponenten i linja k og løser med hensyn på t

$$\frac{1}{3}t = -\frac{1}{3} \cdot (5 - t)^2 + \frac{11}{3}$$

$$\frac{1}{3}t = -\frac{1}{3} \cdot \left(25 - 10t + t^2\right) + \frac{11}{3}$$

$$\frac{1}{3}t = -\frac{25}{3} + \frac{10}{3}t - \frac{1}{3}t^2 + \frac{11}{3}$$

Vi multipliserer alle ledd med 3 og står da igjen med

$$t = -25 + 10t - t^2 + 11$$

som vi former om og står igjen med

$$t^2 - 9t + 14 = 0$$

og dette er jo en andregradslikning vi kan løse med *abc*-formelen

$$t = \frac{-(-9) \pm \sqrt{(-9)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 14}}{2 \cdot 1}$$

$$t = \frac{9 \pm \sqrt{81 - 56}}{2}$$

$$t = \frac{9 \pm 5}{2}$$

$$t_1 = 2 \qquad \vee \qquad t_2 = 7$$

Da har vi funnet begge t verdiene. Disse kan vi bruke i likninga til ℓ og da får vi punktene

$$x = 5 - 2 = 3$$

$$y = \frac{1}{3} \cdot 2 = \frac{2}{3}$$

og

$$x = 5 - 7 = -2$$

$$y = \frac{1}{3} \cdot 7 = \frac{7}{3}$$

Skjæringspunktene er altså $P_1\left(3, \frac{2}{3}\right)$ og $P_2\left(-2, \frac{7}{3}\right)$.

Dersom du er interessert, finner du flere løsningsforslag på eksamensoppgaver.org

SLUTT