Løsningsforslag
AA6516 Matematikk 2MX Privatister
3. mai 2005

eksamensoppgaver.org

Om løsningsforslaget

Løsningsforslaget for matematikk eksamen i 2MX er gratis, og det er lastet ned på eksamensoppgaver.org. Løsningen er myntet på elever og privatister som vil forbrede seg til eksamen i matematikk. Lærere må gjerne bruke løsningsforslaget i undervisningsøyemed, men virksomheter har ingen rett til å anvende dokumentet.

Løsningsforslagene skal utelukkende distribueres fra nettstedet eksamensoppgaver.org, da det er viktig å kunne føye til og rette eventuelle feil i ettertid. På den måten vil alle som ønsker det, til enhver tid finne det siste oppdaterte verket. eksamensoppgaver.org ønsker videre at flest mulig skal få vite om eksamensløsningene, slik at det finnes et eget nettsted hvor man kan tilegne seg dette gratis.

Dersom du sitter på ressurser du har mulighet til å dele med deg, eller ønsker å bidra på annen måte, håper eksamensoppgaver.org på å høre fra deg.

Innholdsfortegnelse

Oppgave 1

a.I)

$$3\sin x = 2$$
$$\sin x = \frac{2}{3}$$
$$x = \arcsin(-\frac{2}{3})$$
$$x = 41.8^\circ \qquad \vee \qquad x = 180^\circ - 41.8^\circ$$
$$x = 41.8^\circ \qquad \vee \qquad x = 138.2^\circ$$

a.II)

$$3\sin x + 2\cos x = 0$$
$$\frac{3\sin x + 2\cos x}{\cos x} = 0$$
$$3\tan x + 2 = 0$$
$$\tan x = -\frac{2}{3}$$
$$x = \arctan(-\frac{2}{3})$$
$$x = -33.7^\circ$$
$$|x| = 33.7^\circ \qquad \vee \qquad x = 180^\circ + |x| = 213.7^\circ$$

b.I)

$$1.05^x = 2$$
$$x \log 1.05 = \log 2$$
$$x = \frac{\log 2}{\log 1.05}$$
$$x \approx 14.2$$

b.II)

$$\ln^2 x - \ln x - 6 = 0$$

Substituerer $u = \ln x$ og bruker abc-formelen.

$$u^2 - u - 6 = 0$$
$$u_1 = 3 \quad \vee \quad u_2 = -2$$
$$\ln x = 3 \quad \vee \quad \ln x = -2$$
$$x = e^3 \quad \vee \quad e^{-2}$$

c.I)

$$f(x)3e^x + 2\ln x$$
$$f'(x) = 3(e^x)' + 2(\ln x)'$$
$$f'(x) = 3e^x + 2 \cdot \frac{1}{x}$$
$$f'(x) = 3e^x + \frac{2}{x}$$
$$f'(x) = \frac{3x \cdot e^x + 2}{x}$$

c.II)

$$g(x) = 5x^2 \cdot \ln x$$
$$g'(x) = 5(x^2)' \cdot \ln x + 5x^2 \cdot (\ln x)'$$
$$g'(x) = 10x \cdot \ln x + 5x^2 \cdot \frac{1}{x}$$
$$g'(x) = 10x \cdot \ln x + \frac{5x^{\cancel{2}}}{\cancel{x}}$$
$$g'(x) = 10x \cdot \ln x + 5x$$
$$g'(x) = 5x\left(\ln x^2 + 1\right)$$

d.I)

$$\int (x^3 - x - 2)dx = \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2} - 2x = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2 - 2x + C$$

d.II)

$$\int \left(2^x - \frac{1}{x}\right) dx = \frac{2^x}{\ln 2} - \ln x + C$$

e.I.1)

$$AD = 3.5m$$
$$\tan(\angle A) = \frac{DC}{AD} \Rightarrow DC = \tan(\angle A) \cdot AD$$
$$(\tan(50^\circ) \cdot 3.5) - (\tan(41^\circ) \cdot 3.5) \approx 1.13\text{m}$$

e.I.2)

Fra e.I.1), vet vi at $DC \approx 3.04$m og at $\angle A = 41°$, maks høyde blir $DC \approx 3.54$m

$$\tan(\angle A) = \frac{DC}{AD}$$

$$\angle A = \arctan(\frac{3.54}{3.5})$$

$$\angle A \approx 45.3°$$

e.II.1)

$$\tan(41°) \cdot x = 1.4$$

$$0.86928x = 1.4$$

$$x = \frac{1.4}{0.86928}$$

$$\underline{x = 1.61}$$

Over 1.4 meter:

$$AB - 2 \cdot 1.61 = 3.78m$$

$$\frac{x}{3.78} = \frac{1}{7}$$

$$x = \frac{3.78 \cdot 1}{7} = 0.54 = 54\%$$

e.II.2)

Fra e.I.2), vet vi at $\angle A = 45.3°$ dersom vi øker taket med 0.5 meter.

$$\tan(45.3°) \cdot x = 1.4$$

$$1.0105x = 1.4$$

$$x = \frac{1.4}{1.0105}$$

$$x = 1.3854$$

Over 1.4 meter:

$$AB - 2 \cdot 1.3854 = 4.2292$$

$$x = \frac{7}{3.78} = 1.655 = 65.5\%$$

Den øker med ca $65.5\% - 54\% = 11.5\%$

Oppgave 2

a)

$$y = 0$$
$$-0.09x^2 + 9 = 0$$
$$x^2 = \frac{-9}{-0.09}$$
$$x^2 = 100$$
$$x = \pm\sqrt{100}$$
$$x = \pm 10$$
$$2 \cdot |x| = 20\text{m}$$

b)

$f = 11$ beskriver veibanen over brua.

$$\int_{-10}^{10} (f(x) - y(x))\,dx = \left[(11x) - (-\frac{9}{100} \cdot \frac{x^3}{3} + 9x)\right]_{-10}^{10} =$$

$$\left[2x + \frac{3x^3}{100}\right]_{-10}^{10} = \left(2 \cdot 10 + \frac{3 \cdot (10)^3}{100}\right) - \left(2 \cdot (-10) + \frac{3 \cdot (-10)^3}{100}\right) =$$

$$(20 + 30) - (-20 + (-30)) = 50 + 20 + 30 = 100\text{m}^2$$

c)

Lekteren er 6 meter lang på hver side av tverrsnittet.

$$y(x) = -0.09x^2 + 9$$

$$y(6) = -0.09 \cdot (6)^2 + 9 = 5.76\text{m}$$

Ja, den passer inn under brua, men jeg ville nok ikke anbefalt å bruke denne elven som transportvei. Klaringen er meget liten da lekteren er 5.5 meter over vannflaten, og brua bare er 5.76 meter over vannflaten ytterst ved lekteren dersom den kjører under i senter av tverrsnittet på brua.

d)

Jeg antar at den nye lekteren også vil ligge 5.5 meter over vannflaten. Jeg antar også at klaringen må være minimum 0.5 meter sammenlagt. (Selv om det kanskje er litt motsigende til svaret mitt i c). Uansett, setter;

$$y(x) = 5.5$$

$$-0.09x^2 + 9 = 5.5$$

$$x^2 = 38.8889$$

$$x = \pm 6.236m$$

$$2 \cdot |x| - 0.5 \approx 12m$$

Det ser ut til at maksimal lengde fortsatt blir 12 meter grunnet sikkerhetsmarginen jeg har lagt inn. Arealet av lekteren blir:

$$A_{lekter} = 12 \cdot 5.5 = 66\mathrm{m}^2$$

Oppgave 3

a)

$$\overrightarrow{AB} = [6-2, 3-1] = [4, 2] = [1, \frac{2}{4}] = [1, \frac{1}{2}]$$

Vi setter $P(x, y)$ som er et vilkårlig punkt på linjen.

$$[x-2, y-1] = [1, \frac{1}{2}]t$$

Vi har funnet parameterfremstillingen for l

$$l: \qquad x = 2 + t \qquad \wedge \qquad y = 1 + \frac{1}{2}t$$

b)

$$\vec{m} = [-1, 1]$$

$$\vec{l} = [1, \frac{1}{2}]$$

$$\vec{m} \cdot \vec{l} = [-1, 1] \cdot [1, \frac{1}{2}] = (-1) \cdot 1 + 1 \cdot \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$

Nei, de står ikke vinkelrett på hverandre. Hvis $\vec{l} \perp \vec{m}$ så må $\vec{l} \cdot \vec{m} = 0$

c)

$l = m$

$$2 + t = 3 - s \qquad \wedge \qquad 1 + \frac{1}{2}t = 3 + s$$

$$t = 1 - s \qquad \rightarrow \qquad 1 + \frac{1}{2}(1 - s) = 3 + s$$

$$\frac{3}{2} - \frac{1}{2}s = 3 + s$$

$$-\frac{3}{2}s = \frac{3}{2}$$

$$s = -\frac{\frac{3}{2}}{\frac{3}{2}}$$

$$s = -1$$

$$t = 1 - (-1) \qquad \leftarrow \qquad s = -1$$

$$\underline{t = 2} \qquad \wedge \qquad \underline{s = -1}$$

Finner koordinatene ved å bruke parameterfremstillingen for l

$$x = 2 + 2 = 4$$

$$y = 1 + \frac{1}{2} \cdot 2 = 1 + 1 = 2$$

Setter prøve ved å bruke parameterfremstillingen for m.

$$x = 3 - (-1) = 3 + 1 = 4$$

$$y = 3 + (-1) = 3 - 1 = 2$$

Parameterfremstillingene tyder samme punkt. Koordinatene hvor linjene skjærer hverandre er $Q(4, 2)$

d)

$A(2, 1)$ og $Q(4, 2)$

$$|\overrightarrow{AQ}| = \sqrt{(4-2)^2 + (1-2)^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$$

Oppgave 4

a)

Dette kan ses på som et hypergeometrisk forsøk fordi:

1. Sannsynligheten for hvilke nummer som blir trukket er uniform.
2. Forsøket skjer uten tilbakelegging.
3. Hassan velger en delmengde av en total mengde.

b)

$$P(1\text{ premie}) = \frac{\binom{3}{3}}{\binom{12}{3}} = \frac{1}{220} \approx 0.45\%$$

c)

$$P(2\text{ premie}) = \frac{\binom{3}{2} \cdot \binom{9}{1}}{\binom{12}{3}} = \frac{27}{220} \approx 12.27\%$$

d)

$$P(1\text{ premie}|7\text{ trukket}) = \frac{\binom{2}{2}}{\binom{11}{2}} = \frac{1}{55} \approx 1.82\%$$

e)

$$P(2\text{ premie}|7\text{ trukket}) = \frac{\binom{2}{1} \cdot \binom{9}{1}}{\binom{11}{2}} = \frac{18}{55} \approx 32.73\%$$

Oppgave 5

a)

Jeg plottet punktene inn under "stat" på kalkulatoren. "pwr"-funksjonen viser seg å være svært passende da den gir ut følgende verdier:

$$y = a \cdot x^b \begin{cases} a &= 0.64408227 \\ b &= 2.53709268 \\ r &= 0.99966319 \\ r^2 &= 0.99932651 \end{cases}$$

Funksjonen blir derfor (etter avrundinger) passende ved:

$$f(x) = 0.64x^{2.5}$$

Den største prosentvise forskjellen finner vi for $x = 12.5$

$$f(12.5) = 0.64 \cdot 12.5^{2.5} \approx 353.6\text{W}$$

Tabellen viser 400W for denne vindmøllehastigheten.

$$\frac{x}{353.6} = \frac{100}{400}$$
$$x \approx 88.4\%$$

Effekten av tabellen er altså 11.6% høyere enn det funksjonen beskriver.

b)

$$f(x) = 250$$
$$0.64x^{2.5} = 250$$
$$x^{2.5} = \frac{250}{0.64}$$
$$x = \sqrt[\frac{5}{2}]{390.625}$$
$$x \approx 10.9\text{m/s}$$

c)

$$f(x) = 0.64 \cdot x^{\frac{5}{2}}$$
$$f'(x) = 0.64 \cdot \frac{5}{2} \cdot x^{\frac{3}{2}}$$
$$f'(x) = 1.6x^{\frac{3}{2}}$$
$$f'(10) = 1.6 \cdot 10^{\frac{3}{2}} \approx 50.6$$

Denne verdien forteller oss at effekten øker med 50.6W etter en vindstyrke på 10 m/s.

d)

Her er en grafisk fremstilling av $\log x$ og $\log f(x)$ i et koordinatsystem med logaritmiske akser.

Som vi ser, så passer de logaritmiske verdiene godt for en rett linje, gitt at vi har logaritmiske akser.

Videre var det naturlig å velge en potensfunksjon som modell for effekten som funksjon av vindhastigheten, fordi effekten øker eksponensielt med vindhastigheten. Det hadde selvsagt gått fint å bruke en eksponentialfunksjon med e som grunntall også.

e)

Verdier:

$$\begin{aligned} A &= -0.1910586 \\ B &= 2.53709268 \approx 2.5 \end{aligned}$$

Regner ut og former om funksjonsuttrykket.

$$\log\left(f(x)\right) = A \cdot \log x + B = 10^{\log(f(x))} = 10^{A \cdot \ln x + B} = 10^B \cdot (10^{\ln x})^A = 10^B \cdot x^A$$

$$f(x) = 10^{-0.1910586} \cdot x^{2.5}$$

$$f(x) = 0.64 \cdot x^{2.5}$$

Dersom du er interessert, finner du flere løsningsforslag på eksamensoppgaver.org

SLUTT