E
K
S
A
M
E
N

UTDANNINGSDIREKTORATET

Matematikk 3MX

Elevar/Elever
Privatistar/Privatister

AA6524/AA6526
8. desember 2004

Vidaregåande kurs II / Videregående kurs II
Studieretning for allmenne, økonomiske og administrative fag

Oppgåva ligg føre på begge målformer, først nynorsk, deretter bokmål. /
Oppgaven foreligger på begge målformer, først nynorsk, deretter bokmål.

Bokmål

OPPGAVE 1

a) Deriver funksjonene:

1) $f(x) = 3 + 2\cos 2x$

2) $g(x) = \sqrt{\sin x}$

b) Finn integralet:

$$\int x^2 \ln x \,\mathrm{d}x$$

c) Løs likningen ved regning:

$$6\cos^2 x - \cos x - 1 = 0 \qquad x \in [0,\ 2\pi\rangle$$

d) La X være en binomisk fordelt variabel med $n = 50$ og $p = 0,75$.

1) Bestem forventningsverdien $\mu = E(X)$ og standardavviket $\sigma = SD(X)$.

2) Bestem $P(X \geq 42)$.

e) En bestemt ellipse kan i polarkoordinater skrives på formen

$$r(\theta) = \frac{16}{5 + 3\cos\theta} \qquad \theta \in [0,\ 2\pi\rangle$$

1) Skisser grafen til r ved hjelp av lommeregneren.

2) Bruk lommeregneren og finn arealet av flatestykket avgrenset av grafen.

Bokmål

OPPGAVE 2

Planet α er gitt ved likningen

$$8x+6y+3z=24$$

a) Forklar at α går gjennom punktene $(3,0,0)$, $(0,4,0)$ og $(0,0,8)$.

b) Finn en normalvektor til α.

c) Bestem avstanden fra origo til α.

En partikkel starter i origo. Etter t sekunder er posisjonen gitt ved

$$\vec{r}(t)=\left[\frac{t}{4},\frac{t^2}{6},t\right] \qquad t\geq 0$$

Alle lengder er målt i meter.

d) 1) Hvor lang tid tar det før partikkelen treffer planet α?

2) Bestem koordinatene til punktet der partikkelen treffer α.

e) Hvor langt beveger partikkelen seg fra den starter til den treffer α?

Visste du at

Origo er et latinsk substantiv avledet av verbet oriri som betyr å reise seg, stå opp, komme fra. Det kan oversettes med opprinnelse eller utgangspunkt. Det er den siste betydningen som benyttes i matematikken.

Kilde: Matematisk etymologi av Ragnar Solvang

OPPGAVE 3

Marcels bestefar dyrker jordbær. Marcel vil undersøke om bærkurvene til bestefaren holder den annonserte gjennomsnittsvekta på 500 g.

Marcel plukker ut ti tilfeldige kurver fra dagens innhøsting. Kurvene veier:

480 g, 512 g, 484 g, 496 g, 488 g, 500 g, 508 g, 516 g, 488 g og 478 g.

a) Bestem et estimat for gjennomsnittsvekta til kurvene.

b) Bestem standardfeilen til dette estimatet.

c) Finn et 95 % konfidensintervall for gjennomsnittsvekta til kurvene. Kommenter svaret.

d) Marcel synes at bredden på konfidensintervallet er for stort. Hva kunne han ha gjort for å få et kortere konfidensintervall?

OPPGAVE 4

Du skal besvare <u>enten</u> alternativ I <u>eller</u> alternativ II.
De to alternativene er likeverdige ved vurderingen.

(Dersom besvarelsen inneholder deler av begge, vil bare det du har skrevet på alternativ I, bli vurdert.)

Alternativ I

En strømbryter skal slå på gatelyset i en by. Lyset blir slått på $T(x)$ timer etter midnatt, der x er antall dager etter 31. desember ($x = 1$ tilsvarer 1. januar).

$$T(x) = 19 - 4\cos\left(\frac{2\pi x}{365}\right)$$

a) Finn ved regning når på døgnet lyset blir slått på den 15. mars, det vil si når $x = 74$.

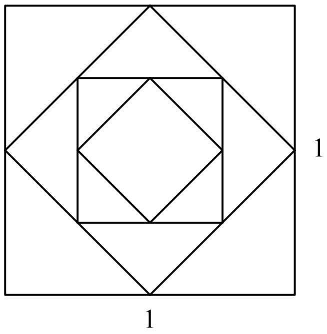
b) Finn ved regning hvilke datoer lyset blir slått på klokka 18.

c) Hvor mye endres tidspunktet $T(x)$ per døgn midt i april?

d) Når på året endrer tidspunktet $T(x)$ seg raskest?

Bokmål

Alternativ II



Figuren viser et kvadrat med sidekant 1. I dette kvadratet er det innskrevet et nytt kvadrat slik at hjørnene i det nye kvadratet ligger midt på hver av de fire sidene i det første kvadratet.

I det andre kvadratet er det innskrevet et tredje kvadrat etter samme prinsipp, og deretter et fjerde osv. Se figuren.

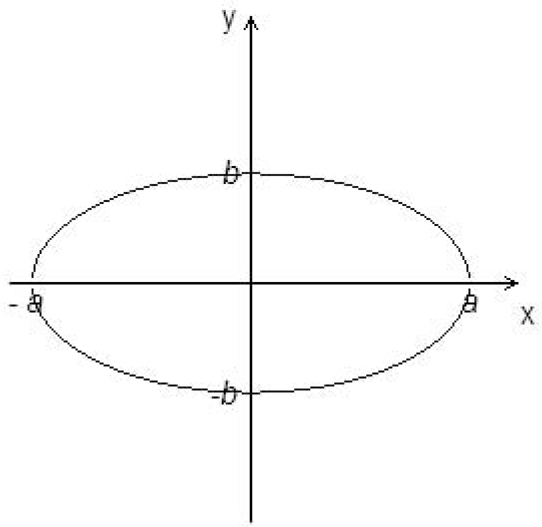
a) Finn arealene av de fire første kvadratene. Vis at summen av disse arealene danner en geometrisk rekke.

b) Finn arealet av kvadrat nr. 10 og summen av de 10 første kvadratene.

c) Forklar hvorfor rekka konvergerer. Bestem summen av arealene når antall kvadrater går mot uendelig.

d) Hvor mange kvadrater må rekka minst bestå av for at summen av arealene skal være større enn 99,9 % av svaret i c)?

OPPGAVE 5



En ellipse med store halvakse a og lille halvakse b er gitt ved likningen

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$$

a) Vis at likningen kan omformes til $y=\pm b\cdot\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}$

b) Forklar at arealet av ellipsen er gitt ved $A=2\int_{-a}^{a} b\cdot\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}\,\mathrm{d}x$

For å kunne beregne dette arealet foretar vi et variabelskifte ved å sette $x=a\cos t$.

c) Hva er t når $x=-a$, og hva er t når $x=a$? Forklar at $\mathrm{d}x=-a\sin t\,\mathrm{d}t$

d) Vis at arealet av ellipsen nå kan skrives som

$$A=-2ab\int_{\pi}^{0}\sin^2 t\,\mathrm{d}t=2ab\int_{0}^{\pi}\sin^2 t\,\mathrm{d}t$$

e) Bruk sammenhengen $\sin^2 t=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2t$ til å finne en formel for arealet av ellipsen.

Visste du at

Den første som brukte ordet ellipse i den betydning det har i dag, var den greske matematikeren Apollonius (262–190 f. Kr.) i sin teori for kjeglesnittene (ellipse, hyperbel og parabel). Disse var tidligere oppdaget av den greske matematikeren Menaikhmos (ca. 350 f. Kr.)

Kilde: Matematisk etymologi av Ragnar Solvang