E
K
S
A
M
E
N

LÆRINGSSENTERET

Matematikk 3MX

Elevar / Elever

AA6524
7. juni 2004

Vidaregåande kurs II / Videregående kurs II
Studieretning for allmenne, økonomiske og administrative fag

Oppgåva ligg føre i begge målformer, først nynorsk, deretter bokmål. /
Oppgaven foreligger på begge målformer, først nynorsk, deretter bokmål.

Bokmål

OPPGAVE 1

a) Deriver funksjonene:

1) $f(x) = 3\sin 2x + 2\cos x$

2) $g(x) = \sin x \cdot \cos x$

b) Finn integralene ved regning:

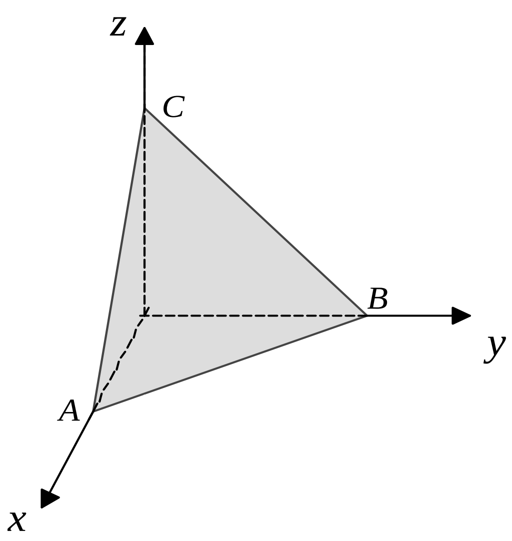
1) $\int 3e^{2x} \mathrm{d}x$

2) $\int_1^e \ln x \, \mathrm{d}x$ $\qquad$ $Tips: \int \ln x \, \mathrm{d}x = \int 1 \cdot \ln x \, \mathrm{d}x$

c) Løs likningen ved regning, og oppgi svaret som eksakte verdier:

$2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0 \qquad x \in [0, 2\pi\rangle$

d) Et plan α skjærer koordinataksene i punktene $A(a, 0, 0)$, $B(0, b, 0)$ og $C(0, 0, c)$, der $a \neq 0$, $b \neq 0$ og $c \neq 0$.



1) Bestem vektorkoordinatene til $\overrightarrow{AB}$ og $\overrightarrow{AC}$.

2) Vis at $\vec{v} = [bc, ac, ab]$ er en normalvektor til planet α.

3) Finn likningen til planet α, og vis at den kan skrives som $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$

Bokmål

OPPGAVE 2

Funksjonene f og g er gitt ved

$$f(x) = 3\sin 2x \quad \text{og} \quad g(x) = \cos 2x + 2 \qquad x \in [0,\ 2\pi\rangle$$

a) Tegn grafene til f og g i samme koordinatsystem.

b) Bruk figuren i a) til å finne koordinatene til skjæringspunktene mellom grafene til f og g.

c) Løs likningen ved regning:

$$3\sin 2x - \cos 2x = 2 \qquad x \in [0,\ 2\pi\rangle$$

Visste du at:

Likningen ovenfor kalles en trigonometrisk likning.

Trigonometri kan oversettes med ”trekantmåling” (fra latin). Hipparkhos (180–125 f.Kr.) kan regnes som den første som utviklet det vi kaller en sinustabell. Betegnelsen trigonometri finner vi første gang på en bok fra 1595 skrevet av B. Pitiscus (1561 – 1613).

Kilde: *Matematisk etymologi* av Ragnar Solvang

Bokmål

OPPGAVE 3

I et forsøk kaster noen elever en vanlig terning 500 ganger. Vi lar den stokastiske variabelen X være antall seksere.

a) Bestem forventningsverdien $\mu = E(X)$ og standardavviket $\sigma = SD(X)$.

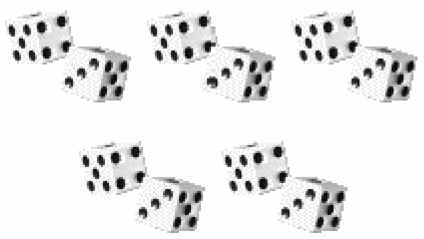
b) Finn $P(75 \leq X \leq 91)$. Forklar hvorfor du her kan bruke normalfordeling.

Noen elever vil undersøke om en pappeske formet som en kube kan brukes i stedet for en terning. De kaster pappesken 500 ganger og finner at den lander med toppen opp 77 ganger.

La p være sannsynligheten for at esken lander med toppen opp.

c) Finn et estimat for p.

d) Bestem et 95 % konfidensintervall for p. Kommenter resultatet.



Visste du at:

Konfidens kommer av det latinske substantivet *confidentia*, en avledning av verbet *confidere*, som betyr ´å lite på, stole på´. Jf. tysk *Konfidenz* og fransk *confidence*. Vi bruker ordet i statistikk i sammensetninger som konfidensintervall.
Kilde: *Matematisk etymologi* av Ragnar Solvang

Bokmål

OPPGAVE 4

Du skal besvare <u>enten</u> alternativ I <u>eller</u> alternativ II.
De to alternativene er likeverdige ved vurderingen.

(Dersom besvarelsen inneholder deler av begge,
vil bare det du har skrevet på alternativ I, bli vurdert.)

Alternativ I

En kurve K er gitt i polarkoordinater ved $r = \frac{1}{3}\theta + 1 \qquad \theta \in [0, 3\pi]$

a) Tegn kurven K.

b) Finn skjæringspunktene mellom K og y-aksen ved regning.

c) Merk av punktet P_1 når $\theta = \frac{\pi}{6}$ og punktet P_2 når $\theta = \frac{2\pi}{3}$. Regn ut arealet avgrenset av kurven K og linjestykkene OP_1 og OP_2.

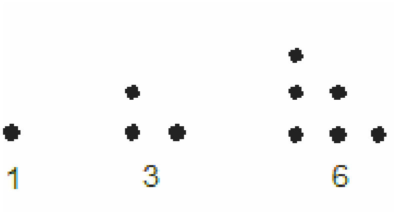
En kurve er gitt i polarkoordinater ved $r = a\theta + b \qquad \theta \in [0, 3\pi]$, $a > 0$ og $b > 0$

d) La $b = 1$. Undersøk hvordan kurven endrer seg for ulike verdier av a.

e) La $a = \frac{1}{3}$. Undersøk hvordan kurven endrer seg for ulike verdier av b.

Bokmål

Alternativ II



Figur 1

Trekanttall kan illustreres som antall ”prikker” som danner en trekantfigur. Figur 1 viser de tre første trekanttallene a_1, a_2 og a_3.

En generell formel for et trekanttall er gitt ved

$$a_n = 1 + 2 + 3 + \cdots + n$$

a) Forklar at $a_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$. Skriv opp de fem første leddene.

Vi ser nå på rekka

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \frac{1}{15} + \cdots + b_n$$

b) Forklar at det generelle leddet for denne rekka kan skrives som

$$b_n = \frac{2}{n(n+1)}$$

c) Vis at

$$b_n = \frac{2}{n(n+1)} = \frac{2}{n} - \frac{2}{n+1}$$

d) Bruk uttrykket for b_n fra c), og skriv ut noen ledd av rekka. Forklar at summen av rekka kan skrives som

$$S_n = 2 - \frac{2}{n+1}$$

e) Finn summen av den uendelige rekka

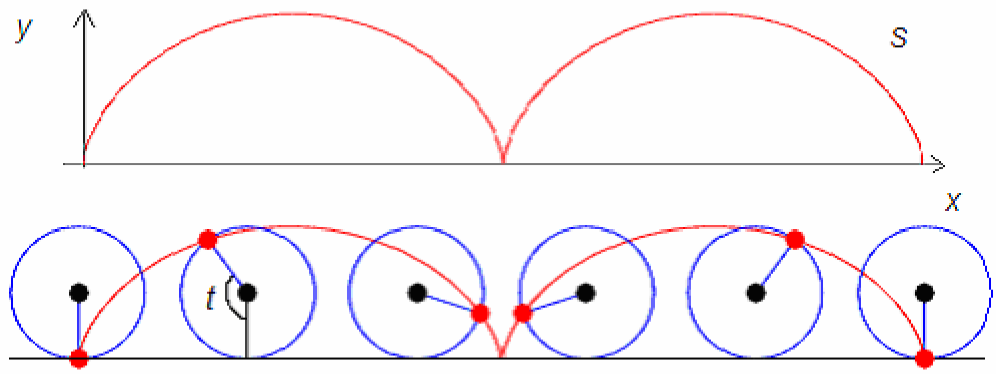
$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \frac{1}{15} + \cdots$$

Bokmål

OPPGAVE 5

Når et sykkelhjul triller bortover veien, vil et punkt på ytterkanten av hjulet beskrive en kurve som kalles en *sykloide*. Den krumme kurven S på figur 1 er en sykloide. Sykkelhjulet på figuren har radius a. Vinkelen t på figuren viser hvor stor vinkel hjulet har dreid fra bevegelsen startet. Når hjulet har gjort én hel omdreining, er t blitt 2π.

Figur 1 viser to omdreininger av hjulet.



Figur 1

Vi legger inn et koordinatsystem slik figur 1 viser. La (x, y) være et vilkårlig punkt på kurven S. Kurven S kan da skrives på parameterformen

$$x = a(t - \sin t)$$
$$y = a(1 - \cos t)$$

a) Tegn av sykloiden på svararket ditt når $a = 0{,}35$. Bruk 2 cm som enhet på begge aksene. Marker punktene på kurven når $t = 0$, $t = \frac{\pi}{2}$, $t = \pi$, $t = \frac{3\pi}{2}$ og $t = 2\pi$.

Vi har en sykkel hvor radius til hjulene er 0,35 m.

b) Bruk formelen for buelengden og lommeregneren til å finne hvor langt et punkt på yttersiden av dekket har beveget seg når hjulet har gått rundt én gang.

c) Vi tenker oss at sykkelen triller 1 km. Hvor langt har da et punkt på yttersiden av dekket beveget seg?

Bokmål

Sykloideformen brukes ofte i dekorasjoner. Figur 2 viser et eksempel på slik bruk. De krumme kurvene på bildet er tilnærmet sykloideformet.

Bildet er fra en undergrunnsstasjon i London. Figur 2

Vi vil finne arealet av det fliselagte området som er avgrenset av gulvet og den krumme buen nærmest på bildet. Det tilsvarer å finne arealet av det flatestykket som er avgrenset av kurven S og x-aksen på figur 1 når $t \in \left[0,\ 2\pi\right\rangle$.

Dette arealet kan skrives som $A = \int_0^{2\pi a} y \ \mathrm{d}x$

d) Bruk parameterframstillingen til sykloiden

$$x = a(t - \sin t)$$
$$y = a(1 - \cos t)$$

til å vise at

1) $\mathrm{d}x = a(1 - \cos t)\mathrm{d}t$

2) $A = \int_0^{2\pi a} y \ \mathrm{d}x = \int_0^{2\pi} a^2(\cos^2 t - 2\cos t + 1)\mathrm{d}t$

e) Bestem ved regning arealet A, uttrykt ved radien a.