Løsningsforslag
AA6524 Matematikk 3MX
Elever
7. juni 2004

eksamensoppgaver.org

Om løsningsforslaget

Løsningsforslaget for matematikk eksamen i 3MX er gratis, og det er lastet ned på eksamensoppgaver.org. Løsningen er myntet på elever og privatister som vil forbrede seg til eksamen i matematikk. Lærere må gjerne bruke løsningsforslaget i undervisningsøyemed, men virksomheter har ingen rett til å anvende dokumentet.

Løsningsforslagene skal utelukkende distribueres fra nettstedet eksamensoppgaver.org, da det er viktig å kunne føye til og rette eventuelle feil i ettertid. På den måten vil alle som ønsker det, til enhver tid finne det siste oppdaterte verket. eksamensoppgaver.org ønsker videre at flest mulig skal få vite om eksamensløsningene, slik at det finnes et eget nettsted hvor man kan tilegne seg dette gratis.

Dersom du sitter på ressurser du har mulighet til å dele med deg, eller ønsker å bidra på annen måte, håper eksamensoppgaver.org på å høre fra deg.

Innholdsfortegnelse

oppgave 1

a.1)

$$f(x) = 3\sin(2x) + 2\cos x$$

Vi deriverer med kjerneregelen

$$\begin{aligned} f'(x) &= 3 \cdot \big(\sin(2x)\big)' \cdot (2x)' + 2 \cdot \big(\cos x\big)' \\ &= 3 \cdot 2 \cdot \cos(2x) + 2 \cdot \big(-\sin x\big) \\ &= 6\cos(2x) - 2\sin x \end{aligned}$$

a.2)

$$g(x) = \sin x \cdot \cos x$$

deriverer med produktregelen

$$\begin{aligned} g'(x) &= \big(\sin x\big)' \cdot \cos x + \sin x \cdot \big(\cos x\big)' \\ &= \cos x \cdot \cos x + \sin x \cdot \big(-\sin x\big) \\ &= \cos^2 x - \sin^2 x \\ &= \cos(2x) \end{aligned}$$

b.1)

Løser det ubestemte integralet

$$\begin{aligned} \int 3e^{2x}\,dx &= \\ 3 \cdot \int e^{2x}\,dx &= 3 \cdot \frac{1}{2}e^{2x} \\ &= \frac{3}{2}e^{2x} + C \end{aligned}$$

b.2)

Vi har

$$\int_1^e \ln x\,dx = \int_1^e 1\cdot \ln x\,dx$$

setter følgende

$$u' = 1 \qquad u = x$$

$$v' = \tfrac{1}{x} \qquad v = \ln x$$

og bruker delvis integrasjon

$$\begin{aligned}
\int_1^e 1\cdot \ln x\,dx &= x\ln x - \int_1^e \cancel{x}\cdot\frac{1}{\cancel{x}}\,dx \\
&= x\ln x - \int_1^e 1\,dx \\
&= x\ln x - x\Big|_0^e \\
&= \big(e\cdot\ln e - e\big) - \big(1\cdot \ln 1 - 1\big) \\
&= 0 + 1 \\
&= 1
\end{aligned}$$

c)

$$2\sin^2 x + \sin x - 1 = 0 \qquad\qquad x\in[0, 2\pi\rangle$$

Vi drar frem gode gamle *abc*-formelen

$$\begin{aligned}
\sin x &= \frac{-1\pm\sqrt{(-1)^2-4\cdot 2\cdot(-1)}}{2\cdot 2} \\
&= \frac{-1\pm\sqrt{1+8}}{4} \\
&= \frac{-1\pm 3}{4} \\
&= \frac{1}{2} \quad\vee\quad -1
\end{aligned}$$

og disse to likningene gir

$$\sin x = \frac{1}{2} \quad\Rightarrow\quad x = \frac{\pi}{6} \quad\vee\quad \pi - \frac{\pi}{6} = \frac{5\pi}{6}$$

og

$$\sin x = -1 \quad\Rightarrow\quad x = \frac{3\pi}{2}$$

så

$$L = \left\{\frac{\pi}{6}, \frac{5\pi}{6}, \frac{3\pi}{2}\right\}$$

d.1)

$$\overrightarrow{AB} = [0-a, b-0, 0-0] = [-a, b, 0]$$

og

$$\overrightarrow{AC} = [0-a, 0-0, c-0] = [-a, 0, c]$$

d.2)

Normalvektoren står vinkelrett på alle linjer i planet. Det betyr at skalarproduktet er null mellom $\vec{v}$ og vektorene vi fant i a). Vi har også

$$\vec{v} = [bc, ac, ab]$$

og setter

$$\begin{aligned} \vec{v}\cdot\overrightarrow{AB} \quad &\wedge \quad \vec{v}\cdot\overrightarrow{AC} \\ [bc, ac, ab]\cdot[-a, b, 0] \quad &\wedge \quad [bc, ac, ab]\cdot[-a, 0, c] \\ -abc + abc + 0 = 0 \quad &\wedge \quad -abc + 0 + abc = 0 \end{aligned}$$

d.3)

Vi velger punktet $A(a, 0, 0)$ og $\vec{v}$ som vi bekreftet i b) Da får vi

$$\alpha: \qquad bc(x-a) + ac(y-0) + ab(z-0) = 0$$

som gir

$$x\cdot bc - abc + y\cdot ac + z\cdot ab = 0$$

flytter over

$$x\cdot bc + y\cdot ac + z\cdot ab = abc$$

Vi multipliserer nå begge sider med $1/abc$

$$\frac{1}{abc}\cdot\Big(x\cdot bc + y\cdot ac + z\cdot ab\Big) = abc\cdot\frac{1}{abc}$$

$$\frac{x\cdot bc}{abc} + \frac{y\cdot ac}{abc} + \frac{z\cdot ab}{abc} = \frac{abc}{abc}$$

som vi stryker mye av

$$\frac{x\cdot \cancel{bc}}{a\cancel{bc}} + \frac{y\cdot \cancel{ac}}{\cancel{a}b\cancel{c}} + \frac{z\cdot \cancel{ab}}{\cancel{ab}c} = \frac{\cancel{abc}}{\cancel{abc}}$$

og da står vi igjen med

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

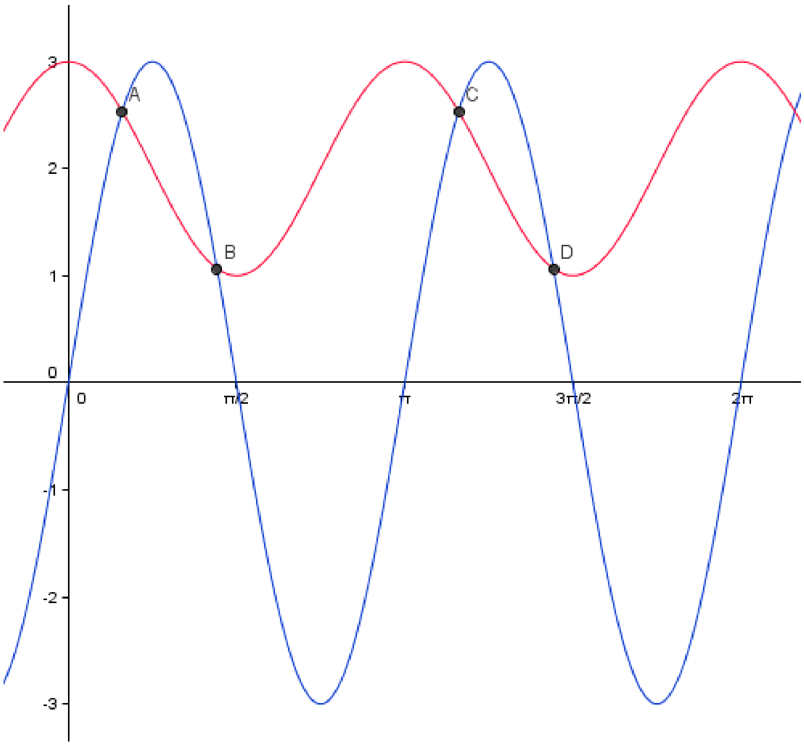
Tada! ;)

oppgave 2

a)

Grafene er vist i oppgaven under.

b)



$A(0.5,\ 2.5)$ $B(1.4,\ 1.0)$ $C(3.6,\ 2.5)$ $D(4.5,\ 1.0)$

c)

$$3\sin(2x) - \cos(2x) = 2 \qquad x \in [0, 2\pi\rangle$$

Vi skriver om denne

$$\sqrt{3^2 + (-1)^2} \cdot \sin\left[2x + \arctan\left(\frac{-1}{3}\right)\right] = 2$$

$$\sin\left[2x - \arctan\left(\frac{1}{3}\right)\right] = \frac{2}{\sqrt{10}}$$

$$2x - \arctan\left(\frac{1}{3}\right) = \arcsin\left(\frac{2}{\sqrt{10}}\right)$$

som gir oss

$$2x = \arcsin\left(\frac{2}{\sqrt{10}}\right)+\arctan\left(\frac{1}{3}\right)+2k\pi \quad \vee \quad 2x = \pi-\arcsin\left(\frac{2}{\sqrt{10}}\right)+\arctan\left(\frac{1}{3}\right)+2k\pi$$

der

$$k \in \mathbb{Z}$$

og videre

$$x = \frac{\arcsin\left(\frac{2}{\sqrt{10}}\right) + \arctan\left(\frac{1}{3}\right) + 2k\pi}{2} \quad \vee \quad x = \frac{\pi - \arcsin\left(\frac{2}{\sqrt{10}}\right) + \arctan\left(\frac{1}{3}\right) + 2k\pi}{2}$$

som er tilnærmet

$$x \approx 0.503 + k\pi \quad \vee \quad x \approx 1.389 + k\pi$$

i intervallet

$$x \in [0, 2\pi\rangle \quad \Rightarrow \quad k = \{0, 1\}$$

som gir

$$L = \Big\{0.50,\ 1.39,\ 2.96,\ 3.65,\ 4.53\Big\}$$

oppgave 3

a)

Dette er en binomisk sannsynlighetsfordeling, og vi lar X være antall seksere.

$$\mu = E(X) = 500 \cdot \frac{1}{6} = \frac{250}{3} = 83.\overline{3}$$

og

$$\sigma = SD(X) = \sqrt{500 \cdot \frac{1}{6}\left(1 - \frac{1}{6}\right)} = \sqrt{\frac{250}{3} \cdot \frac{5}{6}} = \sqrt{\frac{625}{9}} = \frac{25}{3} = 8.\overline{3}$$

b)

Fordi antallet kast er veldig stort, og da vil sannsynligheten stort sett normalisere seg.

$$\begin{aligned}
\Phi(75 \leq X \leq 91) &= \Phi\left(\frac{91 - \frac{250}{3}}{\frac{25}{3}}\right) - \Phi\left(\frac{75 - \frac{250}{3}}{\frac{25}{3}}\right) \\
&= \Phi\left(\frac{23}{25}\right) - \Phi(-1) \\
&= \Phi(0.92) - \big(1 - \Phi(1)\big) \\
&= 0.8212 - 1 + 0.8413 \\
&= 0.6625
\end{aligned}$$

Dette finner vi også enkelt ved å plotte på lommeregneren. I 'STAT', 'DIST', 'NORM' og 'Ncd' kan man plotte inn lower, upper, μ og σ og kabam, der er det hellige svar :)

c)

Jeg må nok si at 'toppen opp' er en rimelig vagt definert hendelse, for den er jo formet som en terning... Uansett, vi skal finne et estimat og definerer Y som antall ganger esken lander med toppen opp.

$$\hat{p} = \frac{Y}{n} = \frac{77}{500} = 0.154$$

d)

Vi finner standardfeilen

$$S_{\hat{p}} = \sqrt{\frac{0.154 \cdot (1 - 0.154)}{500}} = 0.01614$$

videre tar jeg for gitt at vi vet at $z = 1.96$ for et 95% konfidensintervall

$$\langle 0.154 - 1.96 \cdot 0.01614,\ 0.154 + 1.96 \cdot 0.01614 \rangle$$

som tilnærmet blir

$$\langle 0.122,\ 0.186 \rangle$$

Vi ser at konfidensintervallet er $0.186 - 0.122 = 0.064$ altså 6.4% stort. Videre er estimatet $\hat{p} = 0.154$, altså 15.4% som er middelverdien til konfidensintervallet.

$$\frac{0.186 + 0.122}{2} = 0.154$$

Enda viktigere; Hvis vi ser på esken som en terning, vil vi ha sannsynligheten

$$p = \frac{1}{6} \approx 0.167$$

for at terningen skal lande med siden opp. p ligger altså i konfidensintervallet, og vi kan ut fra dette konkludere med at esken kan brukes fremfor en terning.

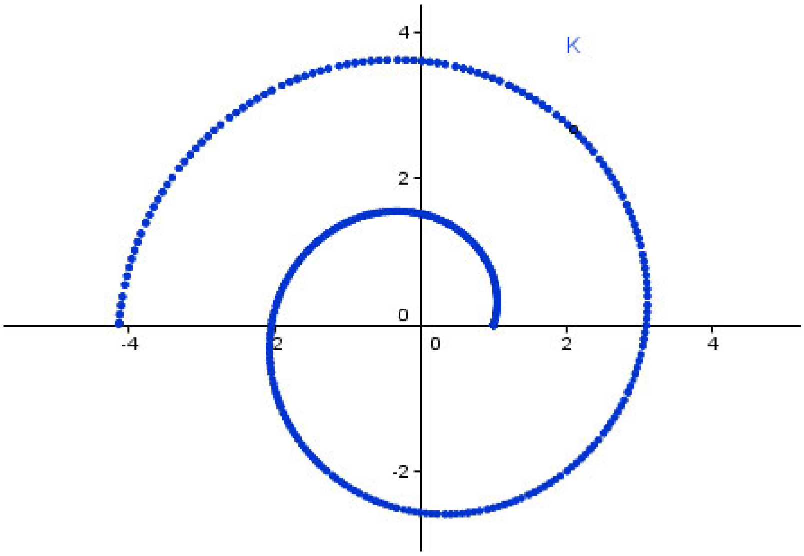
oppgave 4 - alternativ I

a)

Vi er gitt kurven K

$$r = \frac{1}{3}\theta + 1 \qquad \theta \in [0, 3\pi]$$

og her, mine damer og herrer, er den vidunderlige spiralen! :)



b)

y-aksen er jo egentlig ikke representert i et koordinatsystem med koordinater, men vi vet at $x = 0$ når grafen skjærer y-aksen. Videre vet vi at

$$y = r\sin\theta$$

og

$$x = r\cos\theta$$

derfor kan vi sette

$$x = \left(\frac{1}{3}\theta + 1\right) \cdot \cos\theta$$

og setter denne til null, finner vi

$$\left(\frac{1}{3}\theta + 1\right) \cdot \cos\theta = 0$$

$$\cos\theta = 0$$

$$\theta = \arccos(0)$$

som gir oss løsningene

$$\theta = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad \vee \quad \theta = \pi + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \qquad k \in \mathbb{Z}$$

og siden

$$\theta \in [0, 3\pi] \quad \Rightarrow \quad k = \{0, 1\}$$
$$\Downarrow$$
$$\theta = \left\{ \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2} \right\}$$

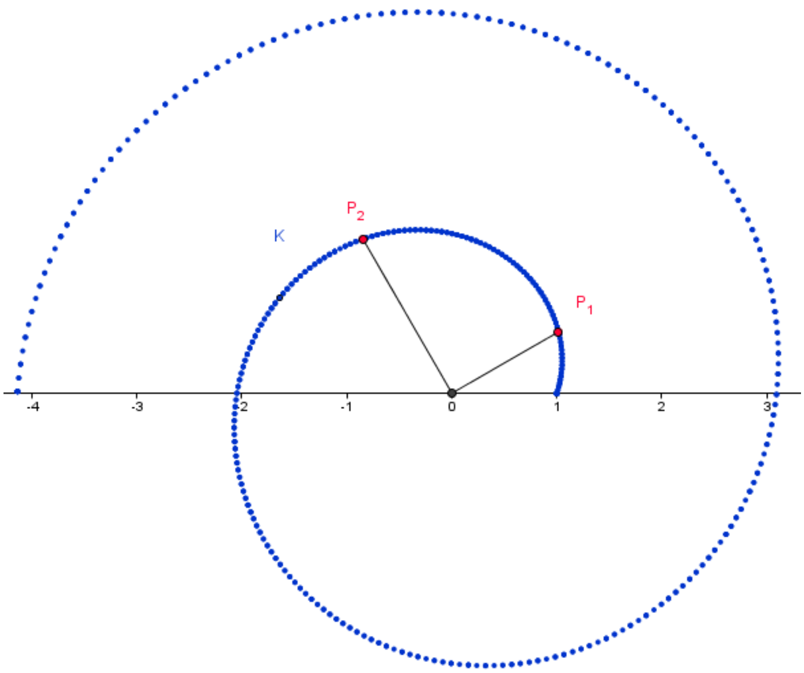
Fra disse verdiene av θ, kan vi enkelt finne de andre koordinatene

$$r(\theta) = \frac{1}{3}\theta + 1$$
$$r\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{3} \cdot \frac{\pi}{2} + 1 \approx 1.52$$
$$r\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \frac{1}{3} \cdot \frac{3\pi}{2} + 1 \approx 2.57$$
$$r\left(\frac{5\pi}{2}\right) = \frac{1}{3} \cdot \frac{5\pi}{2} + 1 \approx 3.62$$

Så da har vi funnet alle tre punktene. Polarkoordinatene er

$$A\left(1.52, \frac{\pi}{2}\right) \qquad B\left(2.57, \frac{3\pi}{2}\right) \qquad C\left(3.62, \frac{5\pi}{2}\right)$$

c)



Vi har integralet

$$\frac{1}{2} \cdot \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{2\pi}{3}} \left(\frac{1}{3}\theta + 1\right)^2 \, d\theta = \frac{1}{2} \cdot \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{2\pi}{3}} \left(\frac{1}{9}\theta^2 + \frac{2}{3}\theta + 1\right) \, d\theta$$

som vi løser

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \cdot \int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{2\pi}{3}} \left(\frac{1}{9}\theta^2 + \frac{2}{3}\theta + 1\right) \, d\theta &= \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{1}{9} \cdot \frac{1}{3}\theta^3 + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2}\theta^2 + \theta\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{2\pi}{3}} \\
&= \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{1}{27}\theta^3 + \frac{2}{6}\theta^2 + \theta\right]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{2\pi}{3}} \\
&= \frac{1}{54}\theta^3 + \frac{1}{6}\theta^2 + \frac{1}{2}\theta \bigg|_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{2\pi}{3}}
\end{aligned}$$

og så evaluerer vi grensene

$$\left(\frac{1}{54} \cdot \left(\frac{2\pi}{3}\right)^3 + \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{2\pi}{3}\right)^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2\pi}{3}\right) - \left(\frac{1}{54} \cdot \left(\frac{\pi}{6}\right)^3 + \frac{1}{6} \cdot \left(\frac{\pi}{6}\right)^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{6}\right) \approx$$

$$1.9484 - 0.3102 \approx 1.64$$

d)

I denne og neste deloppgave kan det være lurt å laste ned den dynamiske Geogebra filen, slik at du selv kan modifisere a- og b-verdiene.

Det som skjer når man setter $b = 1$ og forandrer a-verdien er at spiralen eskalerer og blir bredere fortere, dessuten går den lengre 'ut' fra origo, det vil si polen til et punkt på grafen til K desto større a er.

e)

Desto større b er, desto lenger fra origo starter spiralen. Videre øker r like raskt i forhold til θ uansett hvilken verdi vi gir b.

oppgave 4 - alternativ II

a)

Vi kan se for oss et rektangel med sider ℓ og b. Vi setter $\ell = 1$ og $b = \ell + 1$. Da vil arealet av rektangelet være

$$\ell \cdot b = \ell \cdot (\ell + 1)$$

Halverer vi arealet av dette rektangelet, har vi en trekant

$$\frac{\ell \cdot (\ell + 1)}{2}$$

og dersom vi setter $\ell = n$ får vi

$$a_n = \frac{n \cdot (n+1)}{2}$$

De fem første leddene blir

$$\frac{1 \cdot (1+1)}{2} + \frac{2 \cdot (2+1)}{2} + \frac{3 \cdot (3+1)}{2} + \frac{4 \cdot (4+1)}{2} + \frac{5 \cdot (5+1)}{2} =$$
$$1 + 3 + 6 + 10 + 15$$

b)

Vi ser av de fem sifferne i rekka vi fant i a) og de fem nye og gitte tallene for b_n er slik at

$$1^{-1} = \frac{1}{1} = 1$$

og

$$3^{-1} = \frac{1}{3}$$

altså er

$$b_n = (a_n)^{-1} = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^{-1} = \frac{1}{\frac{n(n+1)}{2}} = 1 \cdot \frac{2}{n(n+1)} = \frac{2}{n(n+1)}$$

c)

Vi er gitt b_n, som er

$$\frac{2}{n \cdot (n+1)} = \frac{2}{n} - \frac{2}{n+1}$$

$$2 = \left(\frac{2}{n} - \frac{2}{n+1}\right) \cdot n(n+1)$$

$$2 = \frac{2n(n+1)}{n} - \frac{2n(n+1)}{n+1}$$

$$2 = \frac{2\cancel{n} \cdot (n+1)}{\cancel{n}} - \frac{2n\cancel{(n+1)}}{\cancel{n+1}}$$
$$2 = 2(n+1) - 2n$$
$$2 = 2n + 2 - 2n$$
$$2 = 2$$

Digresjon:
Vi kan også vise dette slik:

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{n} - \frac{2}{(n+1)} \\ &= \left(\frac{2}{n} - \frac{2}{(n+1)}\right) \cdot n(n+1) \\ &= \frac{2 \cdot \cancel{n} \cdot (n+1)}{\cancel{n} \cdot n \cdot (n+1)} - \frac{2 \cdot n\cancel{(n+1)}}{n \cdot (n+1) \cdot \cancel{(n+1)}} \\ &= \frac{2n+2}{n \cdot (n+1)} - \frac{2n}{n \cdot (n+1)} \\ &= \frac{2}{n \cdot (n+1)} \end{aligned}$$

d)

Regner ut noen verdier

$$\begin{aligned} b_1 &= \frac{2}{1} - \frac{2}{1+1} = \frac{2}{1} - \frac{2}{2} = 1 \\ b_2 &= \frac{2}{2} - \frac{2}{2+1} = \frac{2}{2} - \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \\ b_3 &= \frac{2}{3} - \frac{2}{3+1} = \frac{2}{3} - \frac{2}{4} = \frac{1}{6} \\ b_4 &= \frac{2}{4} - \frac{2}{4+1} = \frac{2}{4} - \frac{2}{5} = \frac{1}{10} \end{aligned}$$

Altså

$$\begin{aligned} S_n &= b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + \ldots + b_n \\ &= \left(\frac{2}{1} - \frac{2}{2}\right) + \left(\frac{2}{2} - \frac{2}{3}\right) + \left(\frac{2}{3} - \frac{2}{4}\right) + \left(\frac{2}{4} - \frac{2}{5}\right) + \ldots + \frac{2}{n} - \frac{2}{n+1} \end{aligned}$$

Vi ser at summen av to og to ledd blir null, og derfor får vi

$$S_n = 2 - \frac{2}{n+1}$$

e)

$$\lim_{n\to\infty} S_n$$

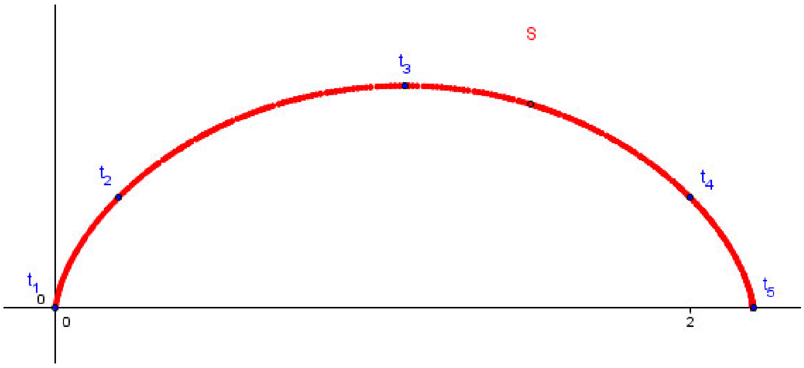
$$\lim_{n\to\infty} 2-\frac{2}{n+1}$$

Som klart gir oss det samme svaret som i c), nemlig

$$S=2$$

oppgave 5

a)



b)

Vi er gitt

$$x(t) = 0.35 \cdot (t - \sin t)$$
$$y(t) = 0.35 \cdot (1 - \cos t)$$

Deriverer begge komponentene

$$\begin{aligned}\vec{r}'(t) &= \Big[0.35(t)' - 0.35\big(\sin t\big)',\, (0.35)' - 0.35 \cdot \big(\cos t\big)'\Big] \\ &= \big[0.35 - 0.35\cos t,\, 0.35\sin t\big] \\ \big|\vec{r}'(t)\big| &= \sqrt{(0.35 - 0.35\cos t)^2 + (0.35\sin t)^2}\end{aligned}$$

Alt dette er selvfølgelig ikke nødvendig, men jeg gjorde det likevel, hehe. Plotter inn

$$\int_0^{2\pi} \sqrt{(0.35 - 0.35\cos t)^2 + (0.35\sin t)^2}\, dt = 2.8$$

da har punktet beveget seg 2.8 m.

c)

Én måte å finne dette på, er å utnytte at

$$1 \text{ km} = 1000 \text{ m}$$

og radius for hjulet,

$$r = 0.35 \text{ m}$$

videre er omkretsen til hjulet

$$\frac{1000}{2\pi(0.35)} \approx 454.728$$

Hjulet har altså trillet nesten 455 ganger, da har punktet beveget seg

$$454.728 \cdot 2.8 \approx 1273.24 \text{ m}$$

eller 1.273 km! :)

d.1)

Minner igjen om parameterfremstillingen.

$$x = a(t - \sin t)$$
$$y = a(1 - \cos t)$$

Hvis vi deriverer x-komponenten med hensyn på t får vi

$$x'(t) = \frac{dx}{dt} = a - \cos t \qquad \Rightarrow \qquad dx = a - a\cos t\, dt \qquad \Rightarrow \qquad dx = a(1 - \cos t)\, dt$$

d.2)

Vi har integralet

$$A = \int_0^{2\pi a} y\, dx$$

og vi vet hva y er, og det samme gjelder dx. Vi setter

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi a} y\, dx &= \int_0^{2\pi} a(1 - \cos t) \cdot a(1 - \cos t)\, dt \\
&= \int_0^{2\pi} a^2\,(1 - \cos t)\,(1 - \cos t)\; dt \\
&= \int_0^{2\pi} a^2 \left(1 - 2\cos t + \cos^2 t\right)\; dt \\
&= a^2 \cdot \int_0^{2\pi} \left(1 - 2\cos t + \cos^2 t\right)\; dt
\end{aligned}$$

Legg merke til at jeg bytter grenser på integralet. Dette er fordi vi substituerer. Av

$$x = a(t - \sin t)$$

ser vi at at $t = 0$ når $x = 0$ og at $t = 2\pi$ når $x = 2\pi a$

e)

Vi vet at a^2 er en konstant, og summene av integralene ovenfor er rimelig greie. Det jeg vil, er å skrive om $\cos^2 t$ i integranden til noe jeg synes er enklere å integrere. Vi kjenner identiteten

$$\cos(2t) = 2\cos^2 t - 1$$

og skriver om denne for å isolere $\cos^2 t$

$$2\cos^2 t = \cos(2t) + 1$$

$$\cos^2 t = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2t)$$

og der har vi den. Nå kan vi substituere og løse integralet

$$\begin{aligned}
a^2 \cdot \int_0^{2\pi} \left(\frac{3}{2} - 2\cos t + \frac{1}{2}\cos(2t)\right) dt &= a^2 \cdot \left[\frac{3}{2}t - 2\sin t + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\sin(2t)\right]_0^{2\pi} \\
&= a^2 \cdot \left[\frac{3}{2}t - 2\sin t + \frac{1}{4}\sin(2t)\right]_0^{2\pi} \\
&= a^2 \cdot \left(\frac{3}{2}\cdot(2\pi a) - 2\sin(2\pi a) + \frac{1}{4}\sin(2\cdot 2\pi a)\right) - 0 \\
&= a^2 \cdot \left(3\pi a - 2\sin(2\pi) + \frac{1}{4}\sin(4\pi)\right) \\
&= a^2 \cdot 3\pi a \\
&= 3\pi a^3
\end{aligned}$$

Og der har vi den :)

Dersom du er interessert, finner du flere løsningsforslag på eksamensoppgaver.org

SLUTT