Utdanningsdirektoratet

Eksamen

Fag: AA6524/AA6526 Matematikk 3MX

Eksamensdato: 6. desember 2006

Vidaregåande kurs II / Videregående kurs II

Studieretning: Allmenne, økonomiske og administrative fag

Elevar/Elever
Privatistar/Privatister

Oppgåva ligg føre på begge målformer, først nynorsk, deretter bokmål. /
Oppgaven foreligger på begge målformer, først nynorsk, deretter bokmål.

Bokmål

Eksamensinformasjon	
Eksamenstid:	5 timer
Hjelpemidler:	Se gjeldende regler.
Vedlegg:	Ingen
Andre opplysninger:	På første side av svararket skal du skrive navn og type på den lommeregneren du har brukt på eksamen.
Framgangsmåte og forklaring:	Der oppgaveteksten ikke sier noe annet, kan du fritt velge framgangsmåte. Om oppgaven krever en bestemt løsningsmetode, vil også en alternativ metode kunne gi noe uttelling. Før inn nødvendig mellomregning. Skriv forklaring der dette er påkrevd, for å vise hva du har gjort. Ved åpne oppgaveformuleringer bør du forklare hvorfor du har valgt din tolkning av oppgaven og ditt valg av løsningsstrategi. Husk å oppgi eventuelle kilder.
Grafer og bruk av grafisk lommeregner:	Oppgi de lommeregnerfunksjonene du har brukt. Det er ikke nødvendig å oppgi alle tastetrykkene. Husk å skrive målestokk og enheter på aksene når du *tegner* grafer i besvarelsen. Du trenger ikke føre inn tabell over utregnede funksjonsverdier dersom det ikke er spurt spesielt etter det i oppgaven. Ved grafisk løsning på lommeregner er det tilstrekkelig at du *skisserer* kurvens form i besvarelsen. På skissen skal svaret markeres tydelig.

Veiledning om vurderingen:	Karakteren fastsettes etter en *helhetlig* vurdering. Det betyr at sensor vurderer i hvilken grad du – viser grunnleggende ferdigheter – kan bruke hjelpemidler – gjennomfører logiske resonnementer – ser sammenhenger i faget, er oppfinnsom og kan anvende fagkunnskap i nye situasjoner – vurderer om svar er rimelige – forklarer framgangsmåter og begrunner svar – skriver oversiktlig og er nøyaktig med utregninger, benevninger, tabeller og grafiske framstillinger

OPPGAVE 1

a) Deriver funksjonen

$$f(x) = e^x \cdot \cos x$$

b) Deriver funksjonen

$$g(x) = \sqrt{3 \sin 2x}$$

c) Finn de eksakte løsningene på ligningen

$$\frac{\cos x}{\sin x} = -1 \qquad x \in [0 \, , \, 2\pi \rangle$$

d) Posisjonen til en partikkel i planet ved tiden t er gitt ved

$$\vec{r}(t) = [t^2 \, , \, t^3 - 3t]$$

1) Tegn grafen som beskriver bevegelsen til partikkelen. La $t \in [0 \, , \, 2]$

2) Bestem ved regning koordinatene til skjæringspunktene mellom grafen og koordinataksene.

3) Bestem koordinatene til de punktene på kurven der hastighetsvektoren er parallell med koordinataksene.

e) Integrasjon kan brukes til å beregne areal og volum. Gi et eksempel på hver av disse metodene.

f) Finn integralet ved regning

$$\int x^2 \cdot e^x \, dx$$

g) Vi har gitt en geometrisk rekke der $a_3 = 1,62$ og $a_7 = 1,06288$.
Undersøk om den uendelige rekka konvergerer, og finn eventuelt summen av rekka.

OPPGAVE 2

Ellen kjøper aksjer for første gang. Hun synes det er så spennende at hun gjennom et helt år følger den daglige *endringen* i verdien til aksjen.

I løpet av dag x endres verdien til aksjen med $f\left(x\right)$ kroner, der $f\left(x\right)$ er gitt ved

$$f(x) = 0,10\sin(0,0172x - 0,149) + 0,20$$

Her betyr for eksempel $f(3) = 0,19$ at verdien til aksjen steg med 19 øre den tredje dagen.

a) Ellen forteller stolt at hun hadde plukket ut en så god aksje at endringen var positiv hver eneste dag. Forklar ut fra funksjonsuttrykket at dette stemmer.

b) Finn toppunktet på grafen til $f(x)$. Forklar hva svaret ditt betyr.

c) Hvilke dager steg verdien med 21 øre?

d) Ellen kjøpte aksjen for 78,46 kr. Hva var verdien etter ett år?

Samtidig med Ellen kjøpte Jan en aksje der den daglige endringen i kroner fulgte funksjonen

$$g(x) = A\sin(0,0172x - 0,149) + d$$

I løpet av et år hadde aksjen til Jan en verdistigning på 87,60 kr.

e) Bestem konstanten d i funksjonsuttrykket.

OPPGAVE 3

En stor skole ønsker å kartlegge interessen for skidag. Skolens ledelse har bestemt at 75 % av elevene må være interessert dersom skidag skal arrangeres. Noen skiglade elever vil undersøke interessen blant elevene og spør 84 tilfeldig utvalgte elever om de ønsker skidag. Av disse svarer 66 at de ønsker det.

a) Finn et estimat for den andelen som ønsker skidag. Hva blir standardfeilen til estimatet?

b) Bestem et 95 % konfidensintervall for den andelen som ønsker skidag.

De elevene som foretok undersøkelsen, er usikre på om 75 % av alle elevene ønsker skidag. De starter derfor en "reklamekampanje". Etter kampanjen foretar de en ny undersøkelse. Denne gangen spør de 128 tilfeldig valgte elever. Av disse er det 105 som ønsker skidag.

c) Bestem et 95 % konfidensintervall for andelen elever som ønsker skidag, basert på denne undersøkelsen. Kommenter resultatet.

d) En av elevene sier at "reklamekampanjen" har økt interessen for skidag. Kommenter dette.

OPPGAVE 4

Du skal besvare <u>enten</u> alternativ I <u>eller</u> alternativ II.
De to alternativene er likeverdige ved vurderingen.

(Dersom besvarelsen inneholder deler av begge, vil bare det du har skrevet på alternativ I, bli vurdert.)

Alternativ I

En såkalt gammafunksjon $G(x)$ har følgende egenskaper:

$$G\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}\ , \qquad G(1)=1 \qquad \text{og} \qquad G(x+1)=x\cdot G(x)$$

Bruker vi disse egenskapene, får vi at $G\left(\frac{3}{2}\right)=G\left(\frac{1}{2}+1\right)=\frac{1}{2}G\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$

a) Bruk egenskapene ovenfor til å vise:

1) $G(2)=1$

2) $G\left(\frac{5}{2}\right)=\frac{3}{4}\sqrt{\pi}$

I en formelsamling finner vi:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x\cdot\cos^n x\,\mathrm{d}x=\frac{G\left(\frac{m+1}{2}\right)\cdot G\left(\frac{n+1}{2}\right)}{2\cdot G\left(\frac{m+n+2}{2}\right)}$$

b) Bruk formelen til å regne ut

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\cdot\cos x\,\mathrm{d}x$$

c) Bruk variabelskifte, og finn et eksakt uttrykk for

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\cdot\cos x\,\mathrm{d}x$$

Alternativ II

Vi har at $(1+x)^3 = 1+3x+3x^2+x^3$. Dersom x er nær null, for eksempel 0,1, vil $x^2 = 0,01$ og $x^3 = 0,001$. Vi kan derfor finne en god tilnærming ved å sette $(1+x)^3 \approx 1+3x$.

I denne oppgaven skal vi bruke en tilnærming gitt ved

$$(1+x)^n \approx 1+n\cdot x \quad \text{når } x \text{ er nær null og } |n| \text{ ikke er for stor.}$$

a) Undersøk feilen i prosent ved å bruke tilnærmingene

$$(1+x)^2 \approx 1+2x \quad \text{og} \quad (1+x)^{-3} \approx 1-3x \quad \text{når } x = 0,1$$

b) 1) Bruk tilnærmingen til å vise

$$\frac{1}{\left(1+x^2\right)^2} \approx 1-2x^2$$

2) Bruk tilnærmingen i 1), og finn et tilnærmet uttrykk for

$$\int_0^{0,1} \frac{1}{\left(1+x^2\right)^2}\,\mathrm{d}x$$

Løs integralet ved hjelp av lommeregneren, og sammenlign svarene.

c) Uttrykket for den kinetiske energien i relativitetsteorien er gitt ved

$$E_k = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}}} - mc^2$$

Sett $x = \dfrac{v}{c}$, og bruk tilnærmingen ovenfor til å vise at

$$E_k \approx \frac{1}{2}mv^2 \quad \text{når } x = \frac{v}{c} \text{ er liten.}$$

OPPGAVE 5

Vi har gitt ligningen

$$x^2 + y^2 - 2x - 4y - 20 = 0$$

a) Vis ved å omforme ligningen at den beskriver en sirkel med sentrum i $(1,\ 2)$ og radius lik 5.

En sirkel med sentrum i $(x_0\ ,\ y_0)$ og radius r kan skrives på formen

$$\vec{r}(t) = \left[x_0 + r\cos t\ ,\ y_0 + r\sin t\right]$$

I vårt tilfelle får vi: $\vec{r}(t) = \left[1 + 5\cos t\ ,\ 2 + 5\sin t\right]$

b) Sett $x = 1 + 5\cos t$ og $y = 2 + 5\sin t$ inn i den omformede ligningen i a), og vis at dette stemmer.

c) Finn fartsvektoren $\vec{v}(t)$ og akselerasjonsvektoren $\vec{a}(t)$, og vis at de står vinkelrett på hverandre for alle t-verdier.

d) Vis at punktet $P(5\ ,\ -1)$ ligger på sirkelen. Finn en parameterframstilling for tangenten i punktet P.