

Løsningsforslag
AA6524/AA6526 Matematikk 3MX
Elever/Privatister
6. desember 2006

eksamensoppgaver.org

Om løsningsforslaget

Løsningsforslaget for matematikk eksamen i 3MX er gratis, og det er lastet ned på eksamensoppgaver.org. Løsningen er myntet på elever og privatister som vil forbrede seg til eksamen i matematikk. Lærere må gjerne bruke løsningsforslaget i undervisningsøyemed, men virksomheter har ingen rett til å anvende dokumentet.

Løsningsforslagene skal utelukkende distribueres fra nettstedet eksamensoppgaver.org, da det er viktig å kunne føye til og rette eventuelle feil i ettertid. På den måten vil alle som ønsker det, til enhver tid finne det siste oppdaterte verket. eksamensoppgaver.org ønsker videre at flest mulig skal få vite om eksamensløsningene, slik at det finnes et eget nettsted hvor man kan tilegne seg dette gratis.

Dersom du sitter på ressurser du har mulighet til å dele med deg, eller ønsker å bidra på annen måte, håper eksamensoppgaver.org på å høre fra deg.

Innholdsfortegnelse

oppgave 1	4
a)	4
b)	4
c)	4
d.1)	5
d.2)	5
d.3)	6
e)	7
f)	7
g)	8
oppgave 2	9
a)	9
b)	9
c)	9
d)	10
e)	10
oppgave 3	11
a)	11
b)	11
c)	11
d)	11
oppgave 4 - alternativ I	12
a.1)	12
a.2)	12
b)	12
c)	13
oppgave 4 - alternativ II	14
a)	14
b.1)	14
b.2)	14
c)	15
oppgave 5	16
a)	16
b)	16
c)	17
d)	17

oppgave 1**a)**

$$f(x) = e^x \cdot \cos x$$

Deriverer

$$\begin{aligned} f'(x) &= (e^x)' \cdot \cos x + e^x \cdot (\cos x)' \\ &= e^x \cdot \cos x + e^x \cdot (-\sin x) \\ &= (\cos x - \sin x) \cdot e^x \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} g(x) &= \sqrt{3 \sin(2x)} \\ g'(x) &= \left(\sqrt{3 \sin(2x)} \right)' \cdot 3(\sin(2x))' \cdot (2x)' \\ &= \frac{1}{2\sqrt{3 \sin(2x)}} \cdot 3 \cos(2x) \cdot 2 \\ &= \frac{2 \cdot 3 \cos(2x)}{2\sqrt{3 \sin(2x)}} \\ &= \frac{3 \cos(2x)}{\sqrt{3 \sin(2x)}} \end{aligned}$$

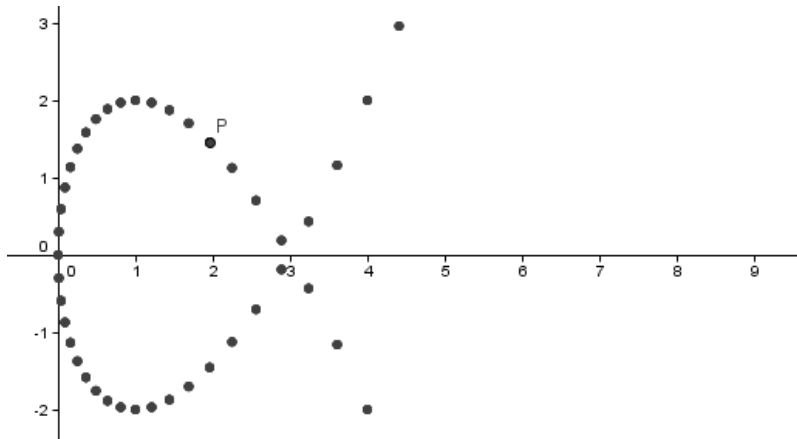
c)

$$\begin{aligned} \frac{\cos x}{\sin x} &= -1 & x \in [0, 2\pi) \\ \cos x &= -\sin x \\ 1 &= -\frac{\sin x}{\cos x} \\ 1 &= -\tan x \\ \tan x &= -1 \\ x &= \arctan(-1) \\ &= -\frac{\pi}{4} \\ &= 2\pi - \frac{\pi}{4} \\ &= \frac{7\pi}{4} + k\pi & k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

Og siden

$$\begin{aligned} x \in [0, 2\pi) &\Rightarrow k = \{-1, 0\} \\ &\Downarrow \\ L &= \left\{ \frac{3\pi}{4}, \frac{7\pi}{4} \right\} \end{aligned}$$

d.1)



d.2)

Vi har parameterfremstillingen

$$\ell : \begin{cases} x = t^2 \\ y = t^3 - 3t \end{cases}$$

og vi vet at grafen vil skjære y -aksen når $x = 0$

$$x = 0 \Rightarrow t = 0 \Rightarrow y = 0$$

likeså skjærer den x -aksen når $y = 0$

$$y = 0$$

$$t^3 - 3t = 0$$

$$t(t^2 - 3) = 0$$

dette gir oss to likninger

$$t = 0 \quad \wedge \quad t^2 - 3 = 0$$

som gir oss

$$t = 0 \quad \vee \quad t = \pm\sqrt{3}$$

og vi bestemmer x -koordinatene

$$x(\pm\sqrt{3}) = (\pm\sqrt{3})^2 = 3$$

så da har vi alle punktene. Nemlig at den skjærer x - og y -aksen i $(0, 0)$ og kun x -aksen i $(3, 0)$

d.3)

Vi deriverer

$$\begin{aligned}\vec{v}(t) &= \vec{r}'(t) \\ \vec{v}(t) &= \left[(t^2)', (t^3)' - 3(t)' \right] \\ &= [2t, 3t^2 - 3]\end{aligned}$$

Hastighetsvektoren er parallell med x -aksen når y -komponenten (til hastighetsvektoren) er lik null

$$\begin{aligned}y'(t) &= 0 \\ 3t^2 - 3 &= 0 \\ 3t^2 &= 3 \\ t &= \pm 1\end{aligned}$$

og da er koordinatene

$$\begin{aligned}\vec{r}(1) &= \left[(1)^2, (1)^3 - 3 \cdot 1 \right] \\ &= [1, -2] \\ \vec{r}(-1) &= \left[(-1)^2, (1)^3 - 3 \cdot (-1) \right] \\ &= [1, 4]\end{aligned}$$

og videre er den parallell med y -aksen når x -komponenten er lik null.

$$\begin{aligned}x'(t) &= 0 \\ 2t &= 0 \\ t &= 0\end{aligned}$$

da er koordinatene

$$\begin{aligned}\vec{r}(0) &= \left[0^2, (0)^3 - 3 \cdot 0 \right] \\ &= [0, 0]\end{aligned}$$

e)

La oss ta for oss en funksjon

$$f(x) = x^2 \quad x \in [0, 5]$$

vi finner arealet mellom grafen til f og x -aksen ved å løse integralet

$$\int_0^5 x^2 dx = \frac{1}{3}x^3 \Big|_0^5 = F(5) - F(0) = \frac{1}{3} \cdot (5)^3 - 0 = \frac{125}{3}$$

Dersom vi vil finne volumet kan vi snurre grafen til f 360° om x -aksen løser vi integralet

$$\pi \cdot \int_0^5 (x^2)^2 dx = \pi \cdot \frac{1}{5}x^5 \Big|_0^5 = F(5) - F(0) = \pi \cdot \frac{1}{5}5^5 - 0 = 625\pi$$

f)

Vi løser integralet

$$\int x^2 \cdot e^x dx$$

ved å sette

$$u' = e^x \quad u = e^x$$

$$v' = 2x \quad v = x^2$$

og bruke delvis integrasjon

$$\begin{aligned} \int x^2 \cdot e^x dx &= x^2 \cdot e^x - 2 \cdot \int x \cdot e^x dx \\ &= x^2 \cdot e^x - 2x \cdot e^x - 2 \cdot \int e^x dx \\ &= (x^2 - 2x - 2) e^x + C \end{aligned}$$

g)

Vi er gitt at

$$a_3 = 1.62 \qquad a_7 = 1.06288$$

Det betyr at

$$a_1 \cdot k^{3-1} = 1.62 \quad \Rightarrow \quad a_1 \cdot k^2 = 1.62 \quad (1)$$

og

$$a_1 \cdot k^{7-1} = 1.06288 \quad \Rightarrow \quad a_1 \cdot k^6 = 1.06288 \quad (2)$$

Finner kvotienten:

altså et likningssett vi kan løse, løser først (1) med hensyn på a_1

$$a_1 = \frac{1.62}{k^2}$$

så setter inn dette for a_1 i (2)

$$\left(\frac{1.62}{k^2}\right) \cdot k^6 = 1.06288$$

$$\frac{1.62 \cdot k^6}{k^2} = 1.06288$$

$$1.62 \cdot k^4 = 1.06288$$

$$k = \sqrt[4]{\frac{1.06288}{1.62}} \approx 0.9$$

Dermed kan vi konkludere med at rekka er konvergent fordi

$$1 > k > -1$$

Finner summen:

Men først finner vi a_1 ved å sette inn for k i (1)

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{1.62}{\left(\sqrt[4]{\frac{1.06288}{1.62}}\right)^2} \\ &= \frac{1.62}{\left(\frac{1.06288}{1.62}\right)^{\frac{1}{4} \cdot 2}} \\ &= \frac{1.62}{\sqrt{\frac{1.06288}{1.62}}} \\ &\approx 2.0 \end{aligned}$$

Så summen, S er

$$S = \frac{2}{1 - 0.9} = \frac{2}{0.1} = 20$$

oppgave 2

a)

Funksjonsuttrykket og definisjonsmengden er

$$f(x) = 0.10 \sin(0.0172x - 0.149) + 0.20 \quad x \in [0, 365)$$

Vi vet at den laveste verdien f kan ha, er når

$$\sin(0.0172x - 0.149) = -1$$

og høyeste verdi er

$$\sin(0.0172x - 0.149) = 1$$

da ser vi at f er

$$f(x) = 0.10 \cdot (-1) + 0.20 = 0.10$$

og

$$f(x) = 0.10 \cdot 1 + 0.20 = 0.30$$

så vi ser at uansett vil $f > 0$ og dermed vil endringen alltid være positiv.

b)

Toppunktet på grafen er som sagt når

$$\sin(0.0172x - 0.149) = 1$$

$$0.0172x = \frac{\pi}{2} + 0.149 + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$x = \frac{\frac{\pi}{2} + 0.149 + 2k\pi}{0.0172} \approx 100 + 365k$$

Altså $T(100, 0.30)$, hvilket betyr at dag 100 i dette året steg aksjen seg med 0.30 kroner.

c)

$$f(x) = 0.21$$

$$0.10 \sin(0.0172x - 0.149) + 0.20 = 0.21$$

$$0.10 \sin(0.0172x - 0.149) = 0.21 - 0.20$$

$$0.10 \sin(0.0172x - 0.149) = 0.01$$

$$\sin(0.0172x - 0.149) = \frac{0.01}{0.10}$$

$$\sin(0.0172x - 0.149) = 0.10$$

$$0.0172x = \arcsin(0.10) + 0.149$$

$$x = \frac{\arcsin(0.10) + 0.149 + 2k\pi}{0.0172} \quad \vee \quad x = \frac{\pi + \arcsin(0.10) + 0.149 + 2k\pi}{0.0172}$$

$$x \approx 14.49 + 365k \quad \vee \quad x \approx 185.49 + 365k$$

Altså den 15 og 186 dagen.

d)

Løser dette 'grisetet' integralet på lommeregneren

$$78.46 + \int_0^{365} (0.10 \sin(0.0172x - 0.149) + 0.20) dx \approx 151.46$$

e)

Velger $A = 1$ og da har vi

$$\int_0^{365} \sin(0.0172x - 0.149) + d dx = 87.60$$

$$-\frac{1}{0.0179} \cdot \cos(0.0179x - 0.149) + dx \Big|_0^{365} = 87.60$$

$$F(365) - F(0) = 87.60$$

$$-\frac{1}{0.0179} \cdot \cos(0.0179 \cdot (365) - 0.149) + 365d + \frac{1}{0.0179} \cdot \cos(0.149) = 87.60$$

$$d = \frac{87.60 + \frac{1}{0.0179} \cdot \cos(6.3845) - \frac{1}{0.0179} \cdot \cos(0.149)}{365}$$

$$d \approx 0.241$$

oppgave 3**a)**

Enten svarer de ja, eller så svarer de nei, og derfor velger jeg binomisk sannsynlighetsfordeling. Setter X = 'Antall elever som vil ha skidag'

$$\hat{p} = \frac{66}{84} = \frac{11}{14} \approx 0.786$$

og standardfeilen

$$S_{\hat{p}} = \sqrt{\frac{\frac{11}{14} \cdot \left(1 - \frac{11}{14}\right)}{84}} \approx 0.045$$

b)

Som vi vet gir et 95% konfidensintervall oss $z = 1.96$, dermed har vi

$$\begin{aligned} &\langle \hat{p} - 1.96 \cdot S_{\hat{p}}, \hat{p} + 1.96 \cdot S_{\hat{p}} \rangle \\ &\langle 0.698, 0.873 \rangle \end{aligned}$$

c)

I den nye undersøkelsen finner vi

$$\hat{p}_2 = \frac{105}{128} \approx 0.8203$$

og

$$S_{\hat{p}_2} = \sqrt{\frac{\frac{105}{128} \cdot \left(1 - \frac{105}{128}\right)}{128}} \approx 0.0339$$

så

$$\begin{aligned} &\langle 0.8203 - 1.96 \cdot 0.0339, 0.8203 + 1.96 \cdot 0.0339 \rangle \\ &\langle 0.753, 0.887 \rangle \end{aligned}$$

d)

Det kan se slik ut når vi ser på spredningen i konfidensintervallene fra b) og c). Vi ser at konfidensintervallet i b) strekker seg fra

$$\langle 0.698, 0.873 \rangle$$

mens konfidensintervallet i c) strekker seg fra

$$\langle 0.753, 0.887 \rangle$$

konfidensintervallet har i tillegg til å øke sannsynligheten for at en elev er for skidag, også blitt smalere. Men man skal også huske på at konfidensintervallet er 95%, derfor er det 5% sannsynlighet for at den ene eller den andre er feil.

oppgave 4 - alternativ I

a.1)

Vi er gitt at gammafunksjonen blant annet gir

$$G(1) = 1 \quad \text{og} \quad G(x+1) = x \cdot G(x)$$

så da kan vi sette

$$G(2) = G(1+1) = 1 \cdot G(1) = 1$$

a.2)

I tillegg til de egenskapene vi ga ovenfor, har den også egenskapen

$$G\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

da er det en smal sak å finne at

$$G\left(\frac{5}{2}\right) = G\left(\frac{3}{2} + 1\right) = \frac{3}{2} \cdot G\left(\frac{1}{2} + 1\right) = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot G\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{4}\sqrt{\pi}$$

b)

Vi er gitt at

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^m x \cdot \cos^n x \, dx = \frac{G\left(\frac{m+1}{2}\right) \cdot G\left(\frac{n+1}{2}\right)}{2 \cdot G\left(\frac{m+n+2}{2}\right)}$$

og bruker dette til å regne ut

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cdot \cos x \, dx &= \frac{G\left(\frac{2+1}{2}\right) \cdot G\left(\frac{1+1}{2}\right)}{2 \cdot G\left(\frac{2+1+2}{2}\right)} \\ &= \frac{G\left(\frac{1}{2} + 1\right) \cdot G(1)}{2 \cdot G\left(\frac{5}{2}\right)} \\ &= \frac{\frac{1}{2} \cdot G\left(\frac{1}{2}\right) \cdot 1}{2 \cdot \frac{3}{4} \cdot \sqrt{\pi}} \\ &= \frac{\frac{1}{2} \cdot \sqrt{\pi}}{2 \cdot \frac{3}{4} \sqrt{\pi}} \\ &= \frac{\frac{\sqrt{\pi}}{2}}{\frac{6\sqrt{\pi}}{4}} \\ &= \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \frac{4}{6\sqrt{\pi}} \\ &= \frac{4}{12} \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

c)

Vi skal bruke substitusjon og finne et eksakt uttrykk for

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x \cdot \cos x \, dx$$

bruker substitusjonen

$$u = \sin^2 x \quad \Rightarrow \quad \pm\sqrt{u} = \sin x$$

$$\frac{du}{dx} = 2 \sin x \cdot \cos x \quad \Rightarrow \quad dx = \frac{1}{2 \sin x \cdot \cos x} du$$

slik at

$$\frac{1}{2} \cdot \int_{\sin^2(0)}^{\sin^2(\frac{\pi}{2})} \sqrt{u} \, du = \frac{1}{2} \cdot \int_0^1 u^{\frac{1}{2}} \, du$$

og dermed

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot \int_0^1 u^{\frac{1}{2}} \, du &= \frac{1}{2} \cdot \left. \frac{u^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} \right|_0^1 \\ &= \frac{1}{2} \cdot \left. \frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} \right|_0^1 \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \left. \sqrt{u^3} \right|_0^1 \\ &= \frac{2}{6} \cdot \left. \sqrt{u^3} \right|_0^1 \\ &= \frac{2}{6} \\ &= \frac{1}{3} \end{aligned}$$

oppgave 4 - alternativ II

a)

$$\frac{x}{100} = \frac{1+2x}{(1+x)^2} \Rightarrow x = \frac{1+2 \cdot 0.1}{(1+0.1)^2} \cdot 100 \approx 99.17\%$$

og

$$x = \frac{1-3 \cdot (0.1)}{(1+0.1)^{-3}} \cdot 100 = 93.17\%$$

så da er gjennomsnittet

$$\frac{99.17 + 93.17}{2} = 96.17\%$$

b.1)

$$\frac{1}{(1+x^2)^2} = (1+x^2)^{-2}$$

og siden vi vet at

$$(1+x)^n = 1+nx$$

så

$$(1+x^2)^{-2} = 1-2x^2$$

b.2)

$$I_t = \int_0^{0.1} \frac{1}{(1+x^2)^2} dx \approx \int_0^{0.1} 1-2x^2 dx$$

videre

$$\begin{aligned} \int_0^{0.1} 1-2x^2 dx &= x - 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot x^3 \Big|_0^{0.1} \\ &= x - \frac{2}{3}x^3 \Big|_0^{0.1} \\ &= \left(0.1 - \frac{2}{3} \cdot (0.1)^3\right) - 0 \\ &= 0.099\bar{3} \end{aligned}$$

og ved lommeregneren

$$I_l \approx 0.099339$$

Slik at I_t er tilnærming og I_l er lommeregneren. Setter

$$\frac{I_l}{I_t} \cdot 100 \approx 100\%$$

med andre ord, ekstremt nøyaktig!

c)

$$E_k = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - mc^2$$

setter

$$x = \frac{v}{c}$$

og får

$$E_k = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - x^2}} - mc^2 = \left(\frac{1}{(1 - x^2)^{\frac{1}{2}}} - 1 \right) \cdot mc^2$$

ser vi på det første leddet i parentesen, ser vi at vi kan skrive

$$\frac{1}{(1 - x^2)^{\frac{1}{2}}} = (1 - x^2)^{-\frac{1}{2}} \approx 1 - \left(-\frac{1}{2} \right) x^2 \approx 1 + \frac{1}{2} x^2$$

slik at

$$\begin{aligned} E_k &= \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} - mc^2 \approx \left(1 + \frac{1}{2} x^2 - 1 \right) \cdot mc^2 \\ &\approx \frac{1}{2} \cdot x^2 \cdot mc^2 \\ &\approx \frac{1}{2} \cdot \frac{v^2}{c^2} \cdot mc^2 \\ &\approx \frac{1}{2} \cdot \frac{v^2 \cdot m \cdot \cancel{c^2}}{\cancel{c^2}} \\ &\approx \frac{1}{2} mv^2 \end{aligned}$$

oppgave 5**a)**

Vi har likningen

$$x^2 + y^2 - 2x - 4y - 20 = 0$$

og vil skrive om likningen for å vise at den beskriver en sirkel med sentrum i $S(1, 2)$ og radius $r = 5$

$$x^2 - 2x + y^2 - 4y = 20$$

bruker så fullstendig kvadrats metode

$$(x - 1)^2 = x^2 - 2x + 1$$

og

$$(y - 2)^2 = y^2 - 4y + 4$$

slik at

$$(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 20 + 5$$

$$(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 5^2$$

Så da har vi vist at $S(1, 2)$ og $r = \sqrt{5^2} = 5$.**b)**

$$(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 5^2$$

setter inn for x og y i likningen og får

$$(1 + 5 \cos t - 1)^2 + (2 + 5 \sin t - 2)^2 = 5^2$$

$$(5 \cos t)^2 + (5 \sin t)^2 = 5^2$$

$$25 \cos^2 t + 25 \sin^2 t = 5^2$$

$$5^2 \cdot (\cos^2 t + \sin^2 t) = 5^2$$

$$\cos^2 t + \sin^2 t = \frac{5^2}{5^2}$$

$$1 = 1$$

c)

Vi vet at $\vec{v}(t) = \vec{r}'(t)$ og at $\vec{a}(t) = \vec{v}'(t) = \vec{r}''(t)$, dermed

$$\begin{aligned}\vec{v}(t) &= \left[(1)' + 5 \cdot (\cos t)', (2)' + 5 \cdot (\sin t)' \right] \\ &= [-5 \sin t, 5 \cos t] \\ \vec{a}(t) &= \left[-5 \cdot (\sin t)', 5 \cdot (\cos t)' \right] \\ &= [-5 \cos t, -5 \sin t]\end{aligned}$$

og så ser vi om de to vektorene er ortogonale ved å sette

$$\begin{aligned}\vec{v}(t) \cdot \vec{a}(t) \\ [-5 \sin t, 5 \cos t] \cdot [-5 \cos t, -5 \sin t] \\ 25 \sin t \cdot \cos t - 25 \sin t \cdot \cos t \\ 0\end{aligned}$$

og da har vi vist at

$$\vec{v}(t) \perp \vec{a}(t)$$

d)

Hvis punktet $P(5, -1)$ ligger på sirkelen vil det oppfylle likningen vi fant i a). Setter inn for x og y i likningen

$$(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 5^2$$

da får vi

$$\begin{aligned}(5 - 1)^2 + (-1 - 2)^2 &= 5^2 \\ (4)^2 + (-3)^2 &= 5^2 \\ 16 + 9 &= 5^2 \\ 25 &= 5^2\end{aligned}$$

og som vi ser, oppfylder det likningen og vi kan konkludere med at P ligger på sirkelen. Videre vet vi at

$$\overrightarrow{SP} = [5 - 1, -1 - 2] = [4, -3]$$

og dersom tangenten har retningsvektoren \vec{n} vil

$$\overrightarrow{SP} \perp \vec{n}$$

og dermed kan vi sette

$$[4, -3] \cdot [a, b] = 0 \quad \Rightarrow \quad a = 3 \quad b = 4$$

slik at

$$\vec{n} = [3, 4]$$

slik at vi kan sette parameterfremstillingen ℓ slik

$$\ell : \begin{cases} x = 3t + 5 \\ y = 4t - 1 \end{cases}$$

Dersom du er interessert, finner du flere [løsningsforslag](#) på eksamensoppgaver.org

SLUTT