

Løsningsforslag
AA6526 Matematikk 3MX Privatister
3. mai 2006

eksamensoppgaver.org

Om løsningsforslaget

Løsningsforslaget for matematikkeksamen i 3MX er gratis, og det er lastet ned på eksamensoppgaver.org. Løsningen er myntet på elever og privatister som vil forbrede seg til eksamen i matematikk. Lærere må gjerne bruke løsningsforslaget i undervisningsøyemed, men virksomheter har ingen rett til å anvende dokumentet.

Løsningsforslagene skal utelukkende distribueres fra nettstedet eksamensoppgaver.org, da det er viktig å kunne føye til og rette eventuelle feil i ettertid. På den måten vil alle som ønsker det, til enhver tid finne det siste oppdaterte verket. eksamensoppgaver.org ønsker videre at flest mulig skal få vite om eksamensløsningene, slik at det finnes et eget nettsted hvor man kan tilegne seg dette gratis.

Dersom du sitter på ressurser du har mulighet til å dele med deg, eller ønsker å bidra på annen måte, håper eksamensoppgaver.org på å høre fra deg.

Innholdsfortegnelse

oppgave 1	4
a)	4
b)	4
c)	4
d)	5
e)	6
f)	6
g)	7
oppgave 2	8
a)	8
b)	8
c)	8
oppgave 3	9
a)	9
b)	9
c)	9
d)	10
e)	11
f)	11
oppgave 4 - alternativ I	12
a)	12
b)	12
c)	12
oppgave 4 - alternativ II	13
a)	13
b)	13
c)	14
oppgave 5	15
a)	15
b)	15
c)	16
d)	16
e)	16

oppgave 1**a)**

$$f(x) = \cos x \cdot \sin x$$

deriverer funksjonen

$$f'(x) = (\cos x)' \cdot \sin x + \cos x \cdot (\sin x)'$$

$$f'(x) = -\sin x \cdot \sin x + \cos x \cdot \cos x$$

$$f'(x) = -\sin^2 x + \cos^2 x$$

her bruker vi identiteten

$$f'(x) = -\sin^2 x + (1 - \sin^2 x)$$

$$f'(x) = 1 - 2\sin^2 x$$

bruker sammenhengen for $\cos(2x)$

$$f'(x) = \cos(2x)$$

b)

$$g(x) = (\sin x + 1)^4$$

deriverer $g(x)$ med kjerneregelen

$$g'(x) = ((\sin x + 1)^4)' \cdot (\sin x + 1)'$$

$$g'(x) = 4(\sin x + 1)^3 \cdot \cos x$$

c)

$$\int 3e^{2x} dx = 3 \cdot \int e^{2x} dx = 3 \cdot \frac{1}{2} e^{2x} = \frac{3}{2} e^{2x} + C$$

d)

$$\int \frac{(\ln x)^2}{x} dx$$

skriver om integranden

$$\int \frac{1}{x} \cdot \ln^2 x dx$$

deriverer $\ln^2 x$ ved å bruke kjerneregelen

$$(\ln^2 x)' \cdot (\ln x)' = 2 \ln x \cdot \frac{1}{x}$$

og bruker delvis integrasjon med disse sammenhengene

$$u' = \frac{1}{x} \quad \implies \quad u = \ln x$$

$$v' = \frac{1}{x} \cdot 2 \ln x \quad \implies \quad v = \ln^2 x$$

begynner integrasjonen

$$\int \frac{\ln^2 x}{x} = \ln^3 x - \int \ln x \cdot \frac{1}{x} \cdot 2 \ln x dx$$

trekker sammen det røde integralet.

$$\int \frac{\ln^2 x}{x} = \ln^3 x - 2 \cdot \int \frac{\ln^2 x}{x} dx$$

Dette integralet er likt det vi begynte med, vi flytter det over og multipliserer med $\frac{1}{3}$ på begge sider av likhetstegnet.

$$\frac{1}{3} \cdot 3 \cdot \int \frac{\ln^2 x}{x} dx = \frac{1}{3} \cdot \ln^3 x$$

$$\int \frac{\ln^2 x}{x} dx = \frac{1}{3} \ln^3 x + C$$

e)

$$x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 6y + 2z = 2$$

Vi vil finne $S(x, y, z)$ og r av kula gitt av likningen ovenfor. Vi lager fullstendige kvadrater for hvert av komponentene til kula.

$$(x + 2)^2 = x^2 + 4x + 4$$

$$(y - 3)^2 = y^2 - 6y + 9$$

$$(z + 1)^2 = z^2 + 2z + 1$$

Vi har altså lagt til $4 + 9 + 1 = 14$ på venstre side av likningen vi skal omforme. Dermed må vi gjøre det samme på høyre side.

$$(x + 2)^2 + (y - 3)^2 + (z + 1)^2 = 2 + 14$$

ferdig skrevet

$$(x + 2)^2 + (y - 3)^2 + (z + 1)^2 = 4^2$$

Da har vi funnet sentrum og radius. De er gitt ved $S(-2, 3, -1)$ og $r = 4$

f)

$$4 \sin x + 2 \cos x = 3 \quad x \in [0, 2\pi)$$

skriver om likningen

$$\sin \left(x + \arctan \left(\frac{2}{4} \right) \right) = \frac{3}{\sqrt{4^2 + 2^2}}$$

$$x + \arctan \left(\frac{1}{2} \right) = \arcsin \left(\frac{3}{\sqrt{20}} \right)$$

$$x_1 \approx 0.7353 - 0.4636 + 2k\pi \quad \vee \quad x_2 \approx \pi - 0.7353 - 0.4636 + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$$

Vi ser at det kun er en løsning i første omløp.

$$x_1 \approx 0.272 \quad \vee \quad x_2 \approx 1.943$$

g)

- 50 000 avbetaling
- Fast beløp per mnd
- 36 mnd nedbetalingstid
- 1.5% rente per mnd
- første betaling 1 mnd etter kjøpet

Vi skal bruke ei geometrisk rekke for å finn ut hvor mye Hans skal betale hver måned. Tar først for oss det første avdraget av de 36 avdragene, a_1 .

$$a_1 = \frac{50000}{36} \approx 1389$$

Dette beløpet skulle blitt betalt dersom avdragene skulle vært varierende, mens oppgaven sier han skal betale et fast beløp. Uansett, første innbetaling må skje en måned etter kjøpet, og det vil derfor bli pålagt rente. Renta er

$$k = \left(1 + \frac{1.5}{100}\right) = 1.015$$

slik at beløpet blir

$$a_1 \cdot k = 1389 \cdot 1.015 \approx 1409.72$$

og den geometriske rekka er gitt ved

$$a_n = a_1 \cdot k^{n-1}$$

dermed har vi

$$a_n = 1409.72 \cdot 1.015^{n-1}$$

videre vet vi at antall måneder

$$n = 36$$

slik at summen av rekka blir

$$S_{36} = \frac{1409.72 \cdot (1.015^{36} - 1)}{1.015 - 1} = 66645.87931$$

og av dette skal han betale et fast beløp per måned, og da blir det

$$\frac{66645.87931}{36} \approx 1851.27$$

oppgave 2

a)

Her kan vi bruke en binomisk sannsynlighetsfordeling fordi det er to komplementære sannsynligheter i uavhengige forsøk. Definerer slik

$X =$ 'Antall ganger den lander på en av de største sidene'.

$$\hat{p} = \frac{X}{n} = \frac{81}{100} = 0.81$$

og standardfeilen

$$S_{\hat{p}} = \sqrt{\frac{\hat{p} \cdot (1 - \hat{p})}{n}} = \sqrt{\frac{0.81 \cdot 0.19}{100}} \approx 0.039$$

b)

$$\langle \hat{p} \mp z \cdot S_{\hat{p}} \rangle$$

Vi vil ha et 95% konfidensintervall. Leser av tabell i formelsamling og finner $z = 1.96$

$$\langle 0.81 - 1.96 \cdot 0.039, 0.81 + 1.96 \cdot 0.039 \rangle \approx \langle 0.734, 0.886 \rangle$$

c)

Vi får følgende ulikhet

$$\left(0.81 + 1.96 \cdot \sqrt{\frac{0.1539}{n}} \right) - \left(0.81 - 1.96 \cdot \sqrt{\frac{0.1539}{n}} \right) \leq 0.1$$

$$3.92 \cdot \sqrt{\frac{0.1539}{n}} \leq 0.1$$

$$\sqrt{\frac{0.1539}{n}} \leq \frac{0.1}{3.92}$$

kvadrerer

$$\frac{0.1539}{n} \leq \left(\frac{0.1}{3.92} \right)^2$$

vi kan multiplisere med n på begge sider i ulikheten, for vi vet at $n > 0$

$$0.1539 \leq \left(\frac{0.1}{3.92} \right)^2 \cdot n$$

$$\frac{0.1539}{\left(\frac{0.1}{3.92} \right)^2} \leq n$$

$$236.48 \leq n$$

Vi kan altså konkludere med at de må kaste minst 237 ganger for å oppnå det.

oppgave 3

a)

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OC} &= [0, 3, 0] \implies C(0, 3, 0) \\ \overrightarrow{OE} &= \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OA} = [0, 0, 5] + [2, 0, 0] = [2, 0, 5] \implies E(2, 0, 5) \\ \overrightarrow{OF} &= \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OC} = [2, 0, 5] + [0, 3, 0] = [2, 3, 5] \implies F(2, 3, 5)\end{aligned}$$

b)

$$|\overrightarrow{CE}| = |[2, -3, 5]| = \sqrt{2^2 + (-3)^2 + 5^2} = \sqrt{38}$$

Vil bestemme $\angle ECF$, og finner vektoren

$$\overrightarrow{CF} = [2, 3 - 3, 5] = [2, 0, 5]$$

og videre

$$\begin{aligned}\cos(\angle ECF) &= \frac{\overrightarrow{CE} \cdot \overrightarrow{CF}}{|\overrightarrow{CE}| \cdot |\overrightarrow{CF}|} \\ \cos(\angle ECF) &= \frac{[2, -3, 5] \cdot [2, 0, 5]}{\sqrt{2^2 + (-3)^2 + 5^2} \cdot \sqrt{2^2 + 0^2 + 5^2}} \\ \cos(\angle ECF) &= \frac{29}{\sqrt{38} \cdot \sqrt{29}} \\ \angle ECF &= \arccos\left(\frac{29}{\sqrt{1102}}\right) \approx 29.1^\circ\end{aligned}$$

c)

ℓ har retningsvektoren $\overrightarrow{CE} = [2, -3, 5]$ og jeg tar utgangspunkt i $E(2, 0, 5)$ for å bestemme parameterfremstillingen for ℓ .

$$\ell \begin{cases} x = 2 + 2t \\ y = -3t \\ z = 5 + 5t \end{cases}$$

d)

Lager en parameterfremstilling for ei linje gjennom A og G med retningsvektor \overrightarrow{AG} . Kaller denne linja ξ . Finner først

$$\overrightarrow{OG} = \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OC} = [0, 0, 5] + [0, 3, 0] = [0, 3, 5] \implies G(0, 3, 5)$$

Vi vet at $A(2, 0, 0)$

$$\overrightarrow{AG} = [0 - 2, 3, 5] = [-2, 3, 5]$$

Tar utgangspunkt i A og setter følgende for ξ

$$\xi \begin{cases} x = 2 - 2s \\ y = 3s \\ z = 5s \end{cases}$$

Setter deretter

$$\xi = \ell$$

$$\begin{array}{rclcl} 2 - 2s = 2 + 2t & \wedge & 3s = -3t & \wedge & 5s = 5 + 5t \\ 2 - 2(1 + t) = 2 + 2t & \leftarrow & 3(1 + t) = -3t & \leftarrow & s = 1 + t \\ 2 - 2 - 2t = 2 + 2t & & 3 + 3t = -3t & & \\ -4t = 2 & & 6t = -3 & & \\ t = -\frac{1}{2} & \rightarrow & 0 = 0 & \rightarrow & s = 1 + \left(-\frac{1}{2}\right) \end{array}$$

$$s = \frac{1}{2}$$

Setter inn for t i ℓ

$$\begin{aligned} x &= 2 + 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = 1 \\ y &= -3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2} \\ z &= 5 + 5 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{10 - 5}{2} = \frac{5}{2} \end{aligned}$$

og finner $K\left(1, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}\right)$ kontrollerer dette ved å sette inn for s i ξ

$$x = 2 - 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$$

$$y = 3 \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

$$z = 5 \cdot \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$

ser ut til å stemme det, ja :)

e)

Planet α går gjennom $O(0, 0, 0)$ og står normalt på \overrightarrow{CE} . Det betyr at \overrightarrow{CE} er normalvektoren til α .

$$\overrightarrow{CE} = [2, -3, 5]$$

$$\alpha : \quad 2(x - 0) + (-3)(y - 0) + 5(z - 0) = 0$$

$$\alpha : \quad 2x - 3y + 5z = 0$$

f)

Kaller avstanden fra α til $C(0, 3, 0)$ for d

$$d = \frac{|2 \cdot (0) + (-3) \cdot (3) + 5 \cdot (0)|}{\sqrt{2^2 + (-3)^2 + 5^2}} = \frac{9}{\sqrt{38}} = \frac{9\sqrt{38}}{38}$$

oppgave 4 - alternativ I

a)

Rad n	Oddetall	Summen av oddetallene i rad n
1	1	$1 = 1^3$
2	3 5	$8 = 2^3$
3	7 9 11	$27 = 3^3$
4	13 15 17 19	$64 = 4^3$
5	21 23 25 27 29	$125 = 5^3$
6	31 33 35 37 39 41	$216 = 6^3$

b)

Summen av denne aritmetiske rekka finner vi ved å bruke formelen for denne aritmetiske rekka

$$S_m = \frac{a_1 + a_m}{2} \cdot m$$

der

$$a_1 = 1 \quad \text{og} \quad a_m = 2m - 1$$

slik at

$$\begin{aligned} S_m &= \frac{1 + (2m - 1)}{2} \cdot m \\ &= \frac{2m \cdot m}{2} \\ &= \frac{2m^2}{2} \\ &= m^2 \end{aligned}$$

c)

Masse **cred til Jarle Alexander Møller** som løste denne oppgaven i kommentarfeltet for dette eksamensprospektet.

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = S_n$$

I deloppgave b viste vi at

$$S_n = S_m = 1 + 3 + \dots + (2m - 1) = m^2$$

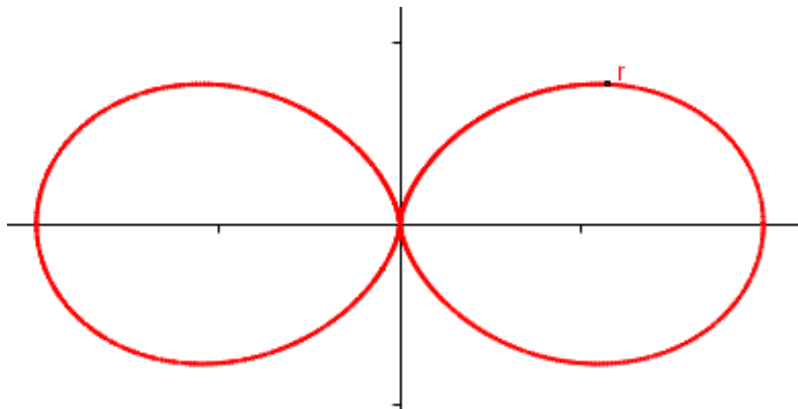
$$\implies 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = m^2$$

Setter inn for m (oppgitt i oppgaven):

$$\implies 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = (1 + 2 + 3 + \dots + n)^2$$

oppgave 4 - alternativ II

a)



b)

$$(x^2 + y^2)^3 = x^4$$

$$x = r \cos \theta \quad \wedge \quad y = r \sin \theta$$

bruger innsetting

$$((r \cos \theta)^2 + (r \sin \theta)^2)^3 = (r \cos \theta)^4$$

$$(r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta)^3 = r^4 \cos^4 \theta$$

$$(r^2 \cdot (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta))^3 = r^4 \cos^4 \theta$$

$$(r^2)^3 = r^4 \cos^4 \theta$$

$$r^{2 \cdot 3} = r^4 \cos^4 \theta$$

$$\frac{r^6}{r^4} = \cos^4 \theta$$

vi vet at $r > 0$

$$r = \sqrt{\cos^4 \theta}$$

$$r = \cos^2 \theta$$

Mette har rett!

c)

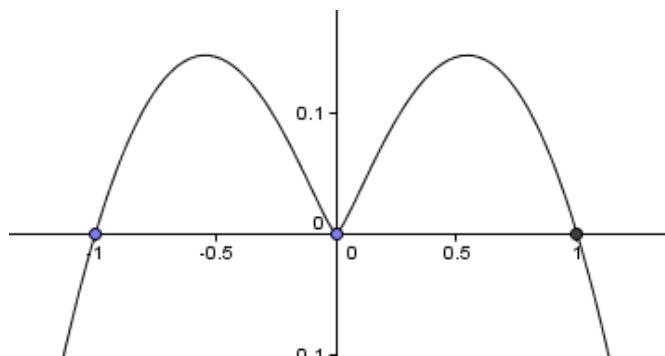
$$(x^2 + y^2)^3 = x^4$$

$$x^2 + y^2 = \sqrt[3]{x^4}$$

$$y^2 = \sqrt[3]{x^4} - x^2$$

$$y^2 = x^{\frac{4}{3}} - x^2$$

Grensene for dette integralet finner jeg grafisk, jfr bildet nedenfor $x \in [-1, 1]$



$$\pi \cdot \int_{-1}^1 \left(\left(x^{\frac{4}{3}} - x^2 \right)^2 \right) dx$$

Denne figuren er symmetrisk om andreaksen, og vi kan derfor skrive om til

$$2\pi \cdot \int_0^1 \left(\left(x^{\frac{4}{3}} - x^2 \right)^2 \right) dx$$

Videre, løser vi ut integranden slik

$$\left(x^{\frac{4}{3}} - x^2 \right)^2 = x^{\frac{4}{3} + \frac{4}{3}} - 2 \cdot x^{\frac{4}{3} + 2} + x^4 = x^{\frac{8}{3}} - 2x^{\frac{10}{3}} + x^4$$

da får vi

$$2\pi \cdot \int_0^1 \left(x^{\frac{8}{3}} - 2x^{\frac{10}{3}} + x^4 \right) dx = 2\pi \cdot \left[\frac{3}{11} x^{\frac{11}{3}} - 2 \cdot \frac{3}{13} x^{\frac{13}{3}} + \frac{1}{5} x^5 \right] =$$

$$2\pi \cdot \left[\frac{3}{11} x^{\frac{11}{3}} - \frac{6}{13} x^{\frac{13}{3}} + \frac{1}{5} x^5 \right]_0^1 = 2\pi \cdot \left(\frac{3}{11} - \frac{6}{13} + \frac{1}{5} \right) - 0 = \frac{16\pi}{715}$$

oppgave 5**a)**

$$f(x) = e^x \cdot \cos x$$

Finner

$$f'(x) = (e^x)' \cdot \cos x + e^x \cdot (\cos x)'$$

$$f'(x) = e^x \cdot \cos x - e^x \cdot \sin x$$

$$f'(x) = (\cos x - \sin x) e^x$$

bestemmer

$$f''(x) = ((e^x)' \cdot \cos x + e^x \cdot (\cos x)') - ((e^x)' \cdot \sin x + e^x \cdot (\sin x)')$$

$$f''(x) = e^x \cdot \cos x - e^x \cdot \sin x - e^x \cdot \sin x - e^x \cdot \cos x$$

trekker sammen

$$f''(x) = -2e^x \cdot \sin x$$

b)Setter $f'(x) = 0$ og tar det derfra

$$(\cos x - \sin x)e^x = 0$$

$$e^x \cos x - e^x \sin x = 0$$

forutsetter at $\cos x \neq 0$

$$\frac{e^x \cos x}{e^x \cos x} = \frac{e^x \sin x}{e^x \cos x}$$

$$1 = \tan x$$

$$x = \arctan(1)$$

dropper alle andre løsninger da $x \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

$$x = \frac{\pi}{4}$$

$$\implies f\left(\frac{\pi}{4}\right) e^{\frac{\pi}{4}} \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = e^{\frac{\pi}{4}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}}}{2}$$

dermed har vi $T\left(\frac{\pi}{4}, \frac{\sqrt{2}e^{\frac{\pi}{4}}}{2}\right)$

c)

$$-2e^x \cdot \sin x = 0$$

$$\sin x = 0$$

$$x = \arcsin 0$$

husker igjen på at $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

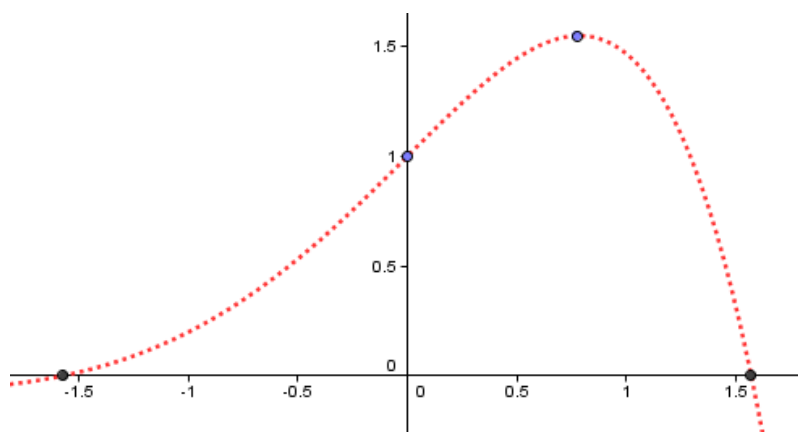
$$x = 0$$

$$\implies f(0) = e^0 \cdot \cos(0) = 1 \cdot 1 = 1$$

vendepunktet er $V(0,1)$

d)

Velger cm som enhet.



Har markert punktene for intervallet $x \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ som også viser seg å være nullpunktene på grafen. Toppunktet T og vendepunktet V er også markert på grafen. Dette er de viktigste punktene, og er det eneste man trenger å vite for å *skissere* en graf.

e)

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (e^x \cdot \cos x) dx$$

bruker delvis integrasjon og setter

$$u' = e^x \implies u = e^x$$

$$v' = -\sin x \implies v = \cos x$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (e^x \cdot \cos x) dx = e^x \cos x - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (-e^x \cdot \sin x) dx$$

skifter fortegn foran det røde integralet

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (e^x \cdot \cos x) dx = e^x \cos x + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (e^x \cdot \sin x) dx$$

delvis integrasjon igjen, denne gangen på det røde integralet

$$\begin{aligned} u' &= e^x &\implies & u = e^x \\ v' &= \cos x &\implies & v = \sin x \end{aligned}$$

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (e^x \cdot \cos x) dx = e^x \cos x + e^x \sin x - \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (e^x \cdot \cos x) dx$$

flytter det røde integralet over på venstre side.

$$2 \cdot \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (e^x \cdot \cos x) dx = (\cos x + \sin x)e^x$$

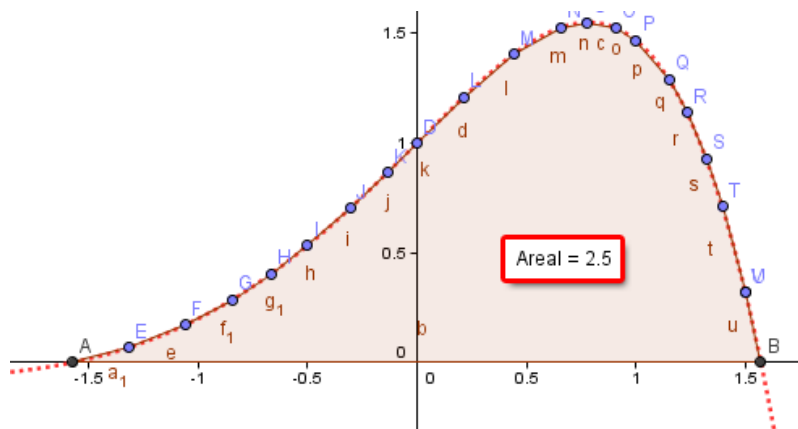
dividerer med 2 på begge sider

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (e^x \cdot \cos x) dx = (\cos x + \sin x) \frac{1}{2} e^x \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$$

evaluerer grensene

$$F\left(\frac{\pi}{2}\right) - F\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}e^{\frac{\pi}{2}}\right) - \left(-\frac{1}{2}e^{-\frac{\pi}{2}}\right) = \frac{e^{\frac{\pi}{2}}}{2} + \frac{1}{2e^{\frac{\pi}{2}}} \approx 2.51 \text{cm}^2$$

Som en artig digresjon, vil jeg vise dette grafisk på bildet nedenfor.



Vi kan observere at arealet under grafen er tilnærmet gitt ved 2.5cm^2 . Dette er jo veldig nærme det vi fant i integralet, og viser hvor utrolig effektivt og eksakt integralet forteller om arealet under grafen. Fantastisk!

Dersom du er interessert, finner du flere [løsningsforslag](#) på eksamensoppgaver.org

SLUTT