Utdanningsdirektoratet

Eksamen

Fag: AA6526 Matematikk 3MX

Eksamensdato: 3. mai 2005

Vidaregåande kurs II /Videregående kurs II

Studieretning: Allmenne, økonomiske og administrative fag

Privatistar / Privatister

Oppgåva ligg føre på begge målformer, først nynorsk, deretter bokmål. /
Oppgaven foreligger på begge målformer, først nynorsk, deretter bokmål.

OPPGAVE 1

a) Løs ligningen ved regning:

$$3\sin x = 2\cos x \qquad x \in \left[0,\ \pi\right\rangle$$

b) Deriver funksjonen:

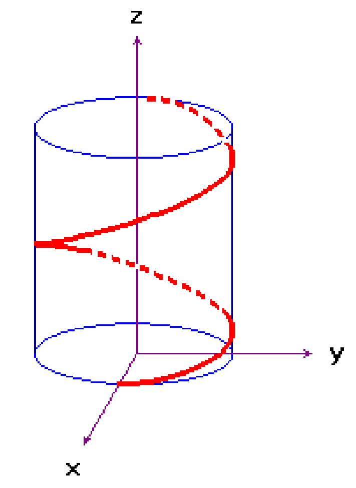
$$f(x) = \ln(\cos x)$$

c) Bestem integralene ved regning:

1) $\int 3\sin 2x \, \mathrm{d}x$

2) $\int x \cdot (x^2 + 3)^5 \, \mathrm{d}x$

d)



En partikkel følger en spiralbane på overflaten av en sylinder.
Posisjonsvektoren til partikkelen er

$$\vec{r}(t) = \left[2\cos t,\ 2\sin t,\ t\right]$$

Tida t er målt i sekunder, og avstander er målt i meter.

1) Bestem fartsvektoren $\vec{v}(t)$ og akselerasjonsvektoren $\vec{a}(t)$.

2) Finn ved regning $v(t) = \left|\vec{v}(t)\right|$ og $a(t) = \left|\vec{a}(t)\right|$. Kommenter svaret.

3) Regn ut $\vec{v}(t) \cdot \vec{a}(t)$. Kommenter svaret.

4) Hvor langt har partikkelen beveget seg på de fire første sekundene?

OPPGAVE 2

På en pakke med salatfrø er det oppgitt en spireevne på 65 %. La den stokastiske variabelen X være antall frø som spirer.

a) Forklar at vi kan se på X som en binomisk fordelt variabel. Finn sannsynligheten for at akkurat 15 frø spirer hvis en sår 20 frø, og spireevnen virkelig er 65 %.

På et jordstykke ble det sådd 600 frø.

b) Hva er sannsynligheten for at minst 400 frø spirer?

Etter at frøene var sådd, viste det seg at pakken med frø var noen år gammel. For å kontrollere spireevnen ble 40 tilfeldige, sådde frø kontrollert. Det viste seg at 20 av frøene hadde spirt.

c) Finn et estimat for spireevnen til de frøene som ble sådd, og bestem standardfeilen til dette estimatet.

d) Bestem et 95 % konfidensintervall for spireevnen til de sådde frøene. Kommenter svaret.

OPPGAVE 3

Vi har gitt punktene $A(0,\ 0,0)$, $B(2,1,-2)$, $C(1,\ 2,\ 2)$ og $D(2,-2,1)$.

a) Finn $\overrightarrow{AB}$ og $\overrightarrow{AC}$. Vis at $\overrightarrow{AD}$ står normalt på planet gjennom punktene A, B og C.

b) Finn vinkelen mellom $\overrightarrow{AB}$ og $\overrightarrow{AC}$. Bruk dette til å bestemme volumet av pyramiden *ABCD*.

c) Finn en ligning for planet α gjennom punktene A, B og C.

En linje l er gitt ved parameterframstillingen

$$\begin{cases} x = -1 - 2t \\ y = 7 + 5t \\ z = 9 + 7t \end{cases}$$

d) Undersøk om noen av punktene B eller C ligger på linja l.

Et punkt E ligger på l og er bestemt ved at $t = 2$.

e) Finn avstanden fra E til planet α.

OPPGAVE 4

Du skal besvare <u>enten</u> alternativ I <u>eller</u> alternativ II.
De to alternativene er likeverdige ved vurderingen.

(Dersom besvarelsen inneholder deler av begge,
vil bare det du har skrevet på alternativ I, bli vurdert.)

Alternativ I

Funksjonen f er gitt ved

$$f(x) = \sin x \cdot \sqrt{1 - \cos x} \qquad x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

a) Tegn grafen til *f*.

b) Bruk lommeregner og finn arealet av det flatestykket som er begrenset av grafen, *x*-aksen og linja $x = \frac{\pi}{2}$.

c) Bestem volumet av det omdreiningslegemet vi får når vi roterer grafen 360° om *x*-aksen.

Per har en idé om at han kan finne volumet ovenfor ved å regne ut volumet av en sylinder med radius lik gjennomsnittsverdien til f i intervallet $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$.

Gjennomsnittsverdien til en funksjon i et intervall $[a, b]$ er gitt ved

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

d) Undersøk om metoden til Per gir rett svar i dette tilfellet.

Kari sier at ideen til Per er lett å motbevise ved å se på formlene for volumet til en kjegle og en sylinder.

e) Forklar hvordan hun kan vise dette.

Alternativ II

Daglengden H (det vil si antall timer med dagslys) i Madrid er tilnærmet gitt ved

$$H(t) = 12 + 2,4 \ \sin\left(0,0172t - 1,376\right)$$

der t er antall dager etter nyttår.

a) Bestem likevektslinja, perioden og amplituden til funksjonen H.

b) Tegn grafen til funksjonen H.

c) Finn ved regning når på året daglengden i Madrid er akkurat 14 timer.

d) Finn ved regning når daglengden øker raskest.

Gjennomsnittsverdien til en funksjon $f(x)$ over et intervall $\left[a, b\right]$ er gitt ved

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

e) Bruk dette, og finn ved regning gjennomsnittlig daglengde i Madrid i januar og i juni.

OPPGAVE 5

a) Når en pendelkule trekkes ut fra sin likevektsstilling og slippes, vil kula fortsette å svinge, men den strekningen kula tilbakelegger, blir mindre for hver svingning.

For en bestemt pendel antar vi at den strekningen kula tilbakelegger i løpet av en svingning, er 1 % mindre enn i den foregående svingningen. Den første hele svingningen er 30 cm.

La a_n være den strekningen, målt i cm, som kula tilbakelegger på den n-te svingningen, der $n = 1,\ 2,\ 3,\ ...$

1) Forklar at $a_n = 30 \cdot 0,99^{n-1}$

2) For hvilke verdier av n er utslaget mindre enn 15 cm?

3) Hvor mange hele svingninger må kula minst gjøre før den har tilbakelagt i alt 20 meter?

4) Undersøk om den tilbakelagte strekningen til kula kan bli 40 meter.

b) I en konvergent geometrisk rekke med positive ledd er summen av det første og det tredje leddet lik produktet av de to første leddene.

Finn ved regning eksakte verdier for rekkens kvotient k og rekkens første ledd a_1, når rekkens sum skal være så liten som mulig.