Løsningsforslag
AA6526 Matematikk 3MX Privatister
3. mai 2005

eksamensoppgaver.org

Om løsningsforslaget

Løsningsforslaget for matematikk eksamen i 3MX er gratis, og det er lastet ned på eksamensoppgaver.org. Løsningen er myntet på elever og privatister som vil forbrede seg til eksamen i matematikk. Lærere må gjerne bruke løsningsforslaget i undervisningsøyemed, men virksomheter har ingen rett til å anvende dokumentet.

Løsningsforslagene skal utelukkende distribueres fra nettstedet eksamensoppgaver.org, da det er viktig å kunne føye til og rette eventuelle feil i ettertid. På den måten vil alle som ønsker det, til enhver tid finne det siste oppdaterte verket. eksamensoppgaver.org ønsker videre at flest mulig skal få vite om eksamensløsningene, slik at det finnes et eget nettsted hvor man kan tilegne seg dette gratis.

Dersom du sitter på ressurser du har mulighet til å dele med deg, eller ønsker å bidra på annen måte, håper eksamensoppgaver.org på å høre fra deg.

Innholdsfortegnelse

oppgave 1

a)

$$3\sin x = 2\cos x \qquad\qquad x \in [0, \pi\rangle$$
$$3 \cdot \frac{\sin x}{\cos x} = 2$$
$$\tan x = \frac{2}{3}$$
$$x = \arctan\left(\frac{2}{3}\right)$$

bruker en tilnærmet verdi for tangens

$$x \approx 0.588 + k\pi \qquad\qquad k \in \mathbb{Z}$$

og av konfidensintervallet ser vi at

$$x \approx 0.59$$

er den eneste løsningen.

b)

$$f(x) = \ln\big(\cos x\big)$$

deriverer funksjonen ved å bruke kjerneregelen

$$\begin{aligned} f'(x) &= \big(\ln(\cos x)\big)' \cdot (\cos x)' \\ &= \frac{1}{\cos x} \cdot \big(-\sin x\big) \\ &= -\frac{\sin x}{\cos x} \\ &= -\tan x \end{aligned}$$

c.1)

$$\begin{aligned} \int 3\sin(2x)\,dx &= 3 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \cos(2x) \\ &= -\frac{3}{2}\cos(2x) + C \end{aligned}$$

c.2)

$$\int x \cdot \left(x^2+3\right)^2 \, dx$$

substituerer

$$u = x^2 + 3 \qquad \Rightarrow \qquad \frac{du}{dx} = 2x$$

så

$$\begin{aligned}\int x \cdot \left(x^2+3\right)^5 \, dx = \\ \frac{1}{2} \cdot \int u^5 \, du &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} \cdot u^6 \\ &= \frac{1}{12} \cdot \left(x^2+3\right)^6 + C\end{aligned}$$

d.1)

Finner

$$\begin{aligned}\vec{v}(t) &= \left[2(\cos t)', \, 2(\sin t)', \, (t)'\right] \\ &= [-2\sin t, \, 2\cos t, \, 1] \\ \vec{a}(t) &= \left[-2(\sin t)', \, 2(\cos t)', \, (1)'\right] \\ &= [-2\cos t, \, -2\sin t, \, 0]\end{aligned}$$

d.2)

Starter med fartsvektoren

$$\begin{aligned}|\vec{v}(t)| &= \sqrt{(-2\sin t)^2 + (2\cos t)^2 + (1)^2} \\ &= \sqrt{4\sin^2 t + 4\cos^2 t + 1} \\ &= \sqrt{4 \cdot \left(\sin^2 t + \cos^2 t\right) + 1} \\ &= \sqrt{5}\end{aligned}$$

og så tar vi akselerasjonsvektoren

$$\begin{aligned}|\vec{a}(t)| &= \sqrt{(-2\cos t)^2 + (-2\sin t)^2} \\ &= \sqrt{4 \cdot \left(\sin^2 t + \cos^2 t\right)} \\ &= \sqrt{4} \\ &= 2\end{aligned}$$

Vi observerer at både banefarten og akselerasjonen er konstant for alle t, altså hele tiden. Banefarten er ca 2.24 m/s og akselerasjonen er 2 m/s^2.

d.3)

Setter

$$\vec{v}(t) \cdot \vec{a}(t)$$

$$[-2\sin t,\ 2\cos t,\ 1] \cdot [-2\cos t,\ -2\sin t,\ 0]$$

$$4\sin t \cdot \cos t - 4\sin t \cdot \cos t + 0$$

$$0$$

farts- og akselerasjonsvektorene står vinkelrett på hverandre for alle t, det betyr at partikkelen følger en 'sirkelbane'. Videre er fartsvektoren lik en retningsvektor for en tangent i et punkt på $\vec{r}(t)$.

d.4)

Etter fire sekunder har t gått fra $t = 0$ til $t = 4$, dette er grensene på integralet. Vi har

$$\int_0^4 \sqrt{\vec{r}'(t)}\, dt = \int_0^4 \sqrt{5}\, dt = \sqrt{5}t \Big|_0^4 = 4\sqrt{5} \approx 8.94 \text{ meter}$$

oppgave 2

a)

X ='antall frø som spirer'. Vi kan se på X som en binomisk fordelt variabel fordi enten så spirer frøet eller så spirer det ikke. Videre er utfallet av hvorvidt hvert frø spirer uniformt fordelt, altså har alle frø 65% sjans for å spire.

Regner ut at akkurat 15 av 20 sådde frø spirer

$$P(X = 15) = \binom{20}{15} \cdot (0.65)^{15} \cdot (1 - 0.65)^{5} \approx 0.1272$$

altså cirka 12.72% sannsynlighet for at 15 av 20 frø spirer.

b)

Med så mange frø (600 stk) kan vi bruke normalfordeling. Finner først forventningsverdien

$$\mu = 600 \cdot 0.65 = 390$$

og standardavviket

$$\sigma = \sqrt{390 \cdot (0.35)} = \sqrt{136.5} \approx 11.68$$

så sannsynligheten for at **minst** 400 frø spirer er

$$\Phi(X \geq 400) = \Phi\left(\frac{400 - 390}{\sqrt{136.5}}\right) \approx \Phi(0.86)$$

leser av dette fra tabellen, og finner

$$\Phi(X \geq 400) \approx 1 - 0.8051 = 0.1949$$

altså er det kun 19.49% sjanse for at minst 400 frø spirer.

c)

Vi har

$$\hat{p} = \frac{20}{40} = 0.5$$

og

$$S_{\hat{p}} = \sqrt{\frac{0.5 \cdot 0.5}{40}} \approx 0.079$$

d)

Vi vet at et 95% konfidensintervall har $z = 1.96$, slik at

$$\left\langle 0.5 \pm 1.96 \cdot \sqrt{\frac{0.25}{40}} \right\rangle$$

så

$$\langle 0.345,\ 0.655 \rangle$$

i prosent

$$\langle 34.5\%,\ 65.5\% \rangle$$

Kommentar:
Dette er et veldig bredt konfidensintervall og differansen er hele $65.5 - 34.5 = 31\%$, vi ser at $\hat{p}$ er middelverdien til konfidensintervallet, og at $p = 65\%$ er i intervallet, men veldig 'langt ute'. Her må vi nok revurdere p.

oppgave 3

a)

$$\overrightarrow{AB} = [2-0, 1-0, -2-0] = [2, 1, -2]$$

og

$$\overrightarrow{AC} = [1-0, 2-0, 2-0] = [1, 2, 2]$$

av disse to vektorene kan vi, gitt at A, B og C ligger i planet, si at $\overrightarrow{AD}$ er normalvektoren til dette planet, dersom den står vinkelrett på de to vektorene vi har funnet. Vi undersøker og finner først

$$\overrightarrow{AD} = [2-0, -2-0, 1-0] = [2, -2, 1]$$

videre

$$\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB}$$

$$[2, -2, 1] \cdot [2, 1, -2] = 4 - 2 - 2 = 0$$

bekreftet, og

$$\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AC}$$

$$[2, -2, 1] \cdot [1, 2, 2] = 2 - 4 + 2 = 0$$

og da var også det bekreftet og

$$\vec{n} = \overrightarrow{AD}$$

b)

Vi kaller denne vinkelen θ

$$\begin{aligned}
\cos(\theta) &= \frac{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC}}{\left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \left|\overrightarrow{AC}\right|} \\
&= \frac{[2, 1, -2] \cdot [1, 2, 2]}{\sqrt{(2)^2 + (1)^2 + (-2)^2} \cdot \sqrt{(1)^2 + (2)^2 + (2)^2}} \\
&= \frac{2 + 2 - 4}{\sqrt{9} \cdot \sqrt{9}} \\
&= \frac{0}{9} \\
&= 0 \\
\theta &= \arccos(0) \\
&= 90^\circ
\end{aligned}$$

Volumet av en pyramide med trekantet grunnflate er

$$V = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h$$

der

$$V = \frac{1}{3} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \left|\overrightarrow{AC}\right|\right) \cdot \left|\overrightarrow{AD}\right|$$

$$V = \frac{1}{6} \cdot \sqrt{(2)^2 + (1)^2 + (-2)^2} \cdot \sqrt{(1)^2 + (2)^2 + (2)^2} \cdot \sqrt{(2)^2 + (-2)^2 + (1)^2}$$

$$V = \frac{1}{6} \cdot \sqrt{9} \cdot \sqrt{9} \cdot \sqrt{9}$$

$$V = \frac{1}{6} \cdot 3^3 = 4.5$$

c)

Vi vet allerede normalvektoren til planet, og da kan vi velge et vilkårlig punkt for å bestemme planet α. Jeg velger punktet A, da får vi

$$\begin{aligned}
\alpha : \qquad & 2(x - 0) - 2(y - 0) + 1(z - 0) = 0 \\
& 2x - 2y + z = 0
\end{aligned}$$

d)

Vi er gitt at

$$l : \begin{cases} \text{x=-1-2t} \\ \text{y=7+5t} \\ \text{z=9+7t} \end{cases}$$

og skal undersøke om punktene B eller C ligger på linja l. Hvis de gjør det, skal samtlige t verdier være samstemte dersom vi setter inn for x, y og z. Vi begynner med B

$$2 = -1 - 2t \quad \wedge \quad 1 = 7 + 5t \quad \wedge \quad -2 = 9 + 7t$$

og løser med hensyn på t

$$\frac{2+1}{-2} = t \quad \wedge \quad \frac{1-7}{5} = t \quad \wedge \quad \frac{-2-9}{7} = t$$

$$t = -\frac{3}{2} \quad \wedge \quad t = -\frac{6}{5} \quad \wedge \quad t = -\frac{11}{7}$$

Nei, B ligger **ikke** på l. Nå til punkt C

$$1 = -1 - 2t \quad \wedge \quad 2 = 7 + 5t \quad \wedge \quad 2 = 9 + 7t$$

og løser igjen med hensyn på t

$$\frac{1+1}{-2} = t \quad \wedge \quad \frac{2-7}{5} = t \quad \wedge \quad \frac{2-9}{7} = t$$

$$t = -1 \quad \wedge \quad t = -1 \quad \wedge \quad t = -1$$

Yeah, baby! C ligger på l :)

e)

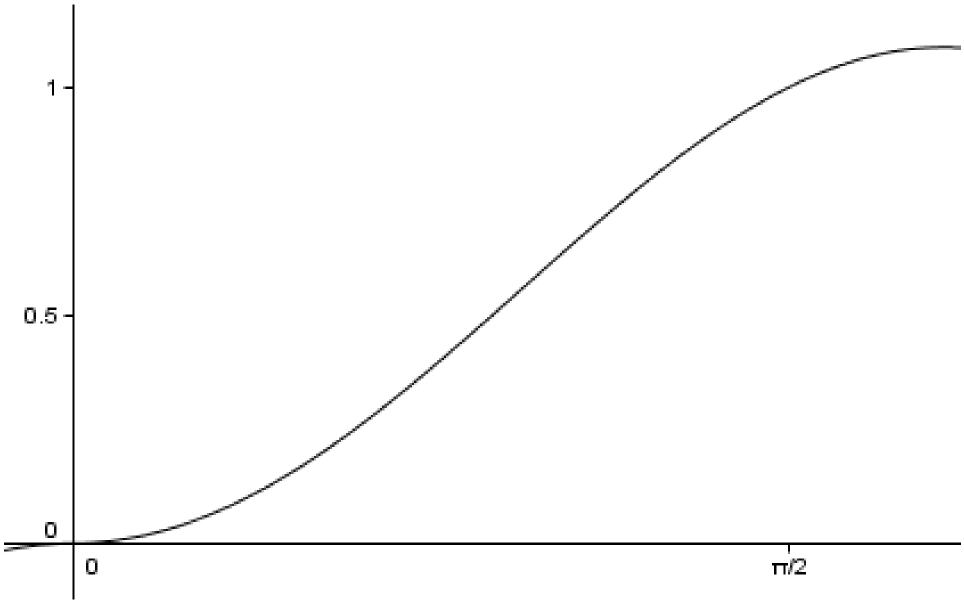
Hvis puntket E ligger på linja l og er bestemt av $t = 2$, da er avstanden (D) fra planet α til E lik

$$\begin{aligned} D &= \frac{|2 \cdot (-1 - 2 \cdot 2) - 2 \cdot (7 + 5 \cdot 2) + (9 + 7 \cdot 2)|}{\sqrt{(2)^2 + (-2)^2 + (1)^2}} \\ &= \frac{|2 \cdot (-5) - 2 \cdot (17) + 23|}{\sqrt{4 + 4 + 1}} \\ &= \frac{|-21|}{\sqrt{9}} \\ &= \frac{21}{3} \\ &= 7 \end{aligned}$$

Her har jeg brukt 'avstandsformelen' mellom punkt og plan.

oppgave 4 - alternativ I

a)



b)

Setter

$$A = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cdot \sqrt{1 - \cos x}\, dx = \frac{2}{3}$$

c)

Regner også ut dette integralet på lommeregneren. Denne gangen setter jeg

$$V = \pi \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(\sin x \cdot \sqrt{1 - \cos x}\right)^2 \, dx \approx 1.42$$

d)

Igjen bruker jeg kalkulatoren

$$r = \frac{1}{\frac{\pi}{2} - 0} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cdot \sqrt{1 - \cos x}\, dx$$

$$r = \frac{2}{\pi} \cdot \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \cdot \sqrt{1 - \cos x}\, dx = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{3\pi}$$

og volumet av en sylinder er gitt ved

$$V = \pi r^2 \cdot h$$

der h er lik høyden og dermed $h = x = \pi/2$

$$V = \pi \cdot \left(\frac{4}{3\pi}\right)^2 \cdot \frac{\pi}{2} \approx 0.89$$

Nei, dette blir ikke riktig.

e)

Vi vet at dersom vi snurrer grafen til f 360° om x-aksen får vi et 'kjegleformet' objekt, og derfor kan Kari si at man kan bruke formlene for volumet til en kjegle og et sylinder til å vise dette

$$V_s = \pi r^2 h \qquad\qquad V_k = \frac{1}{3} \cdot \pi r^2 h$$

som vi ser er volumet av ei kjegle 1/3 mindre enn det av en sylinder og ikke gjennomsnittet av radius.

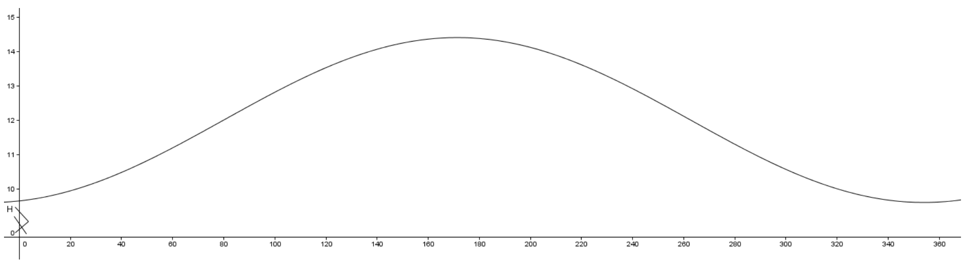
oppgave 4 - alternativ II

a)

- Likevektslinja
$$y = 12$$
- Amplituden
$$A = 2.4$$
- Perioden
$$P = \left|\frac{2\pi}{c}\right| \qquad \Rightarrow \qquad P = \frac{2\pi}{0.0172} \approx 365$$

b)

Tegner grafen til H for $t \in [0, 365\rangle$



c)

$$
\begin{aligned}
12 + 2.4\sin(0.0172t - 1.376) &= 14 \\
2.4\sin(0.0172t - 1.376) &= 14 - 12 \\
\sin(0.0172t - 1.376) &= \frac{2}{2.4} \\
0.0172t - 1.376 &= \arcsin\left(\frac{2}{2.4}\right) \\
0.0172t - 1.376 &= 0.985 + 2k\pi \quad \vee \quad \pi - 0.985 + 2k\pi \qquad k \in \mathbb{Z} \\
t &= \frac{0.985 + 1.376 + 2k\pi}{0.0172} \quad \vee \quad \frac{2.156 + 1.376 + 2k\pi}{0.0172} \\
&= 137.27 + 365k \quad \vee \quad 205.38 + 365k
\end{aligned}
$$

Siden en påbegynt dag er en ny dag, kan vi si at dette skjer ved den 138 (midt i mai) og 206 (slutten av juli) dagen.

d)

Vi deriverer $H(x)$ to ganger

$$
\begin{aligned}
H'(x) &= (12)' + 2.4 \cdot \big(\sin(0.0172t - 1.376)\big)' \cdot (0.0172t - 1.376)' \\
&= 2.4\cos(0.0172t - 1.376) \cdot 0.0172 \\
&= 0.04128\cos(0.0172t - 1.376) \\
H''(x) &= 0.04128 \cdot \big(\cos(0.0172t - 1.376)\big)' \cdot (0.0172t - 1.376)' \\
&= -7.1 \cdot 10^{-4}\sin(0.0172t - 1.376)
\end{aligned}
$$

Når

$$\sin(0.0172t - 1.376) = 0$$

finner vi vendepunktene på grafen, løser dette

$$0.0172t - 1.376 = 0 \quad \vee \quad \pi$$

vi ser av både definisjonsmengden og av grafen at null er det riktige svaret. Derfor tar vi bare med dette, da finner vi at

$$t = \frac{1.376}{0.0172} = 80$$

altså den 80 dagen.

e)

I januar har vi 31 dager, dermed får vi

$$\frac{1}{31} \cdot \int_0^{31} 12 + 2.4\sin(0.0172t - 1.376)\,dx \approx 9.876$$

så

$$0.876 \cdot 60 \approx 53$$

altså er gjennomsnittlig daglengde på omtrent 9 timer og 53 minutter i januar.

Når det gjelder juni, finner vi at juni begynner dag nummer

$$31 + 28 + 31 + 30 + 31 = 151$$

og varer til dag nummer

$$151 + 30 = 181$$

Da kan vi sette

$$\frac{1}{30} \cdot \int_{151}^{181} 12 + 2.4\sin(0.0172t - 1.376)\,dx \approx 14.364$$

så

$$0.364 \cdot 60 \approx 22$$

og da har vi gjennomsnittlig daglengde i juni satt til circa 14 timer og 22 minutter.

oppgave 5

a.1)

Det er gitt at kula tilbakelegger 1% mindre for hver svingning og at den første hele svingningen er 30 cm. Dermed får vi

$$k = 1 - \frac{1}{100} = 0.99$$

dermed vil den geometriske rekka bli

$$a_n = 30 \cdot 0.99^{n-1}$$

a.2)

Her får vi en ulikhet

$$\begin{aligned} 30 \cdot 0.99^{n-1} &< 15 \\ (n-1)\ln(0.99) &< \ln\left(\frac{15}{30}\right) \\ n &< \frac{\ln(0.5)}{\ln(0.99)} + 1 \\ n &< 69.97 \end{aligned}$$

altså må n være mindre enn ca 70, for at utslaget skal være mindre enn 15 cm.

a.3)

Kula har tilbakelagt 20 meter når

$$S_n = 20 \cdot 100$$

så da får vi likningen

$$\begin{aligned} \frac{30 \cdot (0.99^n - 1)}{0.99 - 1} &= 2000 \\ 30 \cdot (0.99^n - 1) &= 2000 \cdot (-0.01) \\ 0.99^n - 1 &= \frac{-20}{30} \\ 0.99^n &= \frac{1}{3} \\ n \cdot \ln(0.99) &= \ln\left(\frac{1}{3}\right) \\ n &= \frac{\ln 1 - \ln 3}{\ln(0.99)} \\ n &\approx 109.3 \end{aligned}$$

Da må kula ha gjort minst 110 svingninger.

a.4)

Vi observerer at

$$1 > k > -1$$

og dermed er rekka konvergent, altså går den mot en verdi. La oss finne denne verdien.

$$S = \frac{30}{1 - 0.99} = 3000$$

og som vi vet, er målet gitt i cm, og dermed er dette 30 meter. Ergo kan ikke den tilbakelagte strekningen bli mer enn 30 meter.

b)

Vi er gitt at i ei konvergent rekke med positive ledd, er summen av det første og det tredje leddet lik produktet av de to første leddene.

$$a_1 + a_3 = a_1 \cdot a_2$$

som vi kan skrive

$$a_1 + a_1 \cdot k^{3-1} = a_1 \cdot a_1 \cdot k^{2-1}$$

og forenkle til

$$a_1 + a_1 \cdot k^2 = a_1^2 \cdot k$$

for å gjøre det klarere setter vi $a_1 = a$

$$a + ak^2 = a^2 k$$

dividerer med a på begge sider

$$1 + k^2 = ak$$

og deretter med k, slik at vi får

$$a = \frac{k^2 + 1}{k} \tag{1}$$

videre har vi

$$S = \frac{a}{1 - k} \tag{2}$$

og når vi setter inn for a fra (1) for a i (2) slik

$$S = \frac{\frac{k^2+1}{k}}{1 - k} = \frac{k^2 + 1}{k} \cdot \frac{1}{1 - k} = \frac{k^2 + 1}{k - k^2}$$

dermed har vi gjort summen S til en funksjon av k. Vi deriverer med hensyn på k for å finne den minste summen som er mulig

$$\begin{aligned}
S'(k) &= \frac{\left(k^2+1\right)' \cdot \left(k-k^2\right) - \left(k^2+1\right) \cdot \left(k-k^2\right)'}{\left(k-k^2\right)^2} \\
&= \frac{2k \cdot \left(k-k^2\right) - \left(k^2+1\right) \cdot (1-2k)}{\left(k-k^2\right)^2} \\
&= \frac{2k^2 - 2k^3 - k^2 + 2k^3 - 1 + 2k}{\left(k-k^2\right)^2} \\
&= \frac{k^2+2k-1}{\left(k-k^2\right)^2}
\end{aligned}$$

og når

$$S'(k) = 0$$

finner vi den optimale verdien for k

$$k^2 + 2k - 1 = 0$$

$$\begin{aligned}
k &= \frac{-2 \pm \sqrt{(2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2 \cdot 1} \\
&= \frac{-2 \pm \sqrt{4+4}}{2} \\
&= \frac{-2 \pm 2\sqrt{2}}{2} \\
&= -1 \pm \sqrt{2} \\
&= \sqrt{2} - 1
\end{aligned}$$

videre kan vi nå sette inn for k i (1)

$$\begin{aligned}
a &= \frac{\left(\sqrt{2}-1\right)^2 + 1}{\sqrt{2}-1} \\
&= \frac{2 - 2\sqrt{2} + 2}{\sqrt{2}-1} \\
&= \frac{4 - 2\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1} \cdot \frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}+1} \\
&= \frac{4\sqrt{2} + 4 - 4 - 2\sqrt{2}}{2-1} \\
&= 2\sqrt{2}
\end{aligned}$$

og da var a_1 såvel som k bestemt :)

Dersom du er interessert, finner du flere løsningsforslag på eksamensoppgaver.org

SLUTT