

Løsningsforslag  
AA6516 Matematikk 2MX - 5. mai 2004

[eksamensoppgaver.org](http://eksamensoppgaver.org)

## Om løsningsforslaget

Løsningsforslaget for matematikk eksamen i 2MX er gratis, og det er lastet ned på [eksamensoppgaver.org](http://eksamensoppgaver.org). Løsningen er myntet på elever og privatister som vil forbrede seg til eksamen i matematikk. Lærere må gjerne bruke løsningsforslaget i undervisningsøyemed, men virksomheter har ingen rett til å anvende dokumentet.

Løsningsforslagene skal utelukkende distribueres fra nettstedet [eksamensoppgaver.org](http://eksamensoppgaver.org), da det er viktig å kunne føye til og rette eventuelle feil i ettertid. På den måten vil alle som ønsker det, til enhver tid finne det siste oppdaterte verket. [eksamensoppgaver.org](http://eksamensoppgaver.org) ønsker videre at flest mulig skal få vite om eksamensløsningene, slik at det finnes et eget nettsted hvor man kan tilegne seg dette gratis.

Dersom du sitter på ressurser du har mulighet til å dele med deg, eller ønsker å bidra på annen måte, håper [eksamensoppgaver.org](http://eksamensoppgaver.org) på å høre fra deg.

## Innholdsfortegnelse

<b>oppgave 1</b>	<b>5</b>
a.I.1)	5
a.I.2)	5
a.II.1)	5
a.II.2)	6
b.I.1)	6
b.I.2)	6
b.II.1)	7
b.II.2)	7
c.I)	7
c.II)	7
d.I.1)	8
d.I.2)	8
d.II.1)	9
d.II.2)	10
<b>oppgave 2</b>	<b>11</b>
a)	11
b)	11
c)	11
d)	12
<b>oppgave 3</b>	<b>13</b>
a)	13
b)	13
c)	13
d)	13
<b>oppgave 4</b>	<b>14</b>
a)	14
b)	14
c)	14
d)	15
e)	17
<b>oppgave 5</b>	<b>18</b>
a)	18
b.1)	18
b.2)	18
b.3)	19
c)	19
d)	20

---

e) ..... 20

## oppgave 1

a.I.1)

$$2 \cdot 10^x = 700$$

$$10^x = \frac{700}{2}$$

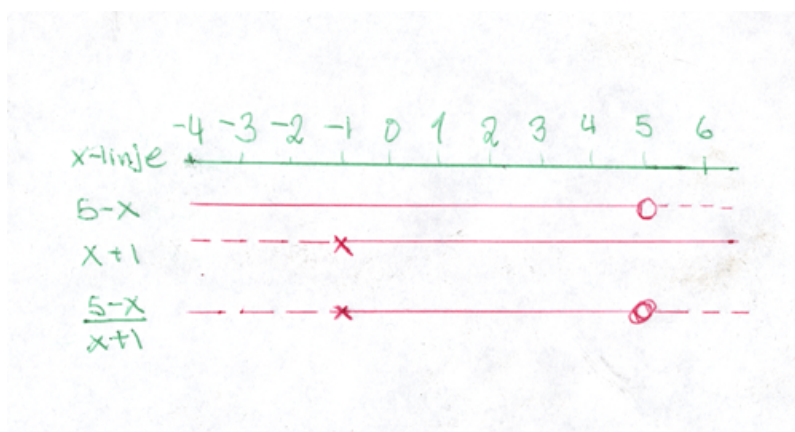
$$x \lg(10) = \lg(350)$$

$$x = \lg(350)$$

a.I.2)

$$\frac{5-x}{x+1} > 0$$

Vi bruker fortegnsskjema



Av fortegnsskjemaet kan vi lese at ulikheten stemmer for

$$x \in \langle -1, 5 \rangle$$

a.II.1)

$$\ln x^2 = 3 - \ln x$$

$$2 \ln x = 3 - \ln x$$

$$3 \ln x = 3$$

$$\ln x = \frac{3}{3}$$

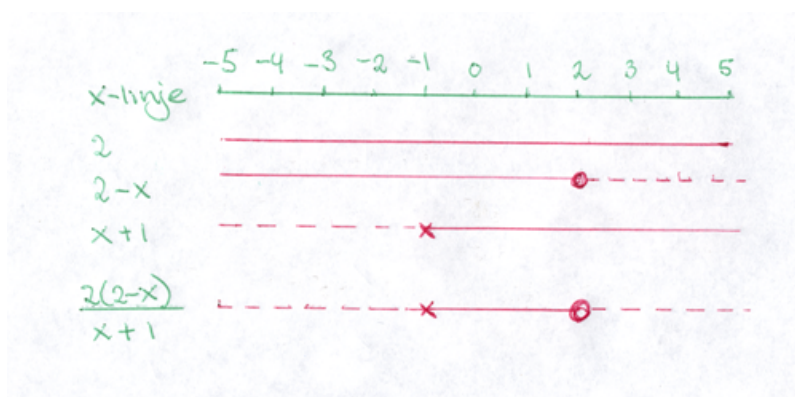
$$x = e^1$$

$$x = e$$

a.II.2)

$$\begin{aligned}\frac{5-x}{x+1} &\geq 1 \\ \frac{5-x}{x+1} - 1 &\geq 0 \\ \frac{5-x-(x+1)}{x+1} &\geq 0 \\ \frac{4-2x}{x+1} &\geq 0 \\ \frac{2(2-x)}{x+1} &\geq 0\end{aligned}$$

Så bruker vi fortegnskjema.



Her ser vi at ulikheten stemmer for

$$x \in \langle -1, 2 \rangle$$

b.I.1)

$$\begin{aligned}f(x) &= e^{2x} \\ f'(x) &= (e^{2x})' \cdot (2x)' \\ &= 2e^{2x}\end{aligned}$$

b.I.2)

$$\begin{aligned}h(x) &= 2 \ln(3x) \\ h'(x) &= 2 \cdot (\ln(3x))' \cdot (3x)' \\ &= 6 \cdot \frac{1}{3x} \\ &= \frac{6}{3x} \\ &= \frac{2}{x}\end{aligned}$$

**b.II.1)**

$$\begin{aligned}g(x) &= e^{x^2+4x} \\g'(x) &= \left(e^{x^2+4x}\right)' \cdot (x^2 + 4x)' \\&= (2x + 4)e^{x^2+4x}\end{aligned}$$

**b.II.2)**

$$\begin{aligned}k(x) &= x^2 \cdot \ln(2x) \\k'(x) &= (x^2)' \cdot \ln(2x) + x^2 \cdot (\ln(2x))' \cdot (2x)' \\&= 2x \cdot \ln(2x) + x^2 \cdot \frac{1}{2x} \cdot 2 \\&= 2x \ln(2x) + \frac{2x^2}{2x} \\&= 2x \ln(2x) + x\end{aligned}$$

**c.I)**

Vi skal bestemme det uegentlige integralet ved regning.

$$\begin{aligned}\int (t^2 - 2t + 1) dt &= \frac{t^{2+1}}{2+1} - \frac{2t^{1+1}}{1+1} + t \\&= \frac{1}{3}t^3 - t^2 + t + C\end{aligned}$$

**c.II)**

$$\begin{aligned}\int_0^2 2e^{3x} dx &= \\2 \cdot \int_0^2 e^{3x} dx &= \left[2 \frac{1}{3} e^{3x}\right]_0^2 \\&= F(2) - F(0) \\&= \frac{2}{3} e^{3 \cdot 2} - \frac{2}{3} e^{3 \cdot 0} \\&= \frac{2}{3} e^6 - \frac{2}{3} \\&\approx 268,3\end{aligned}$$

**d.I.1)**

Vi bruker cosinussetningen for å finne lengden av siden  $BC$ .

$$BC^2 = AC^2 + AB^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos(\angle A)$$

$$BC^2 = 5^2 + 6^2 - 2 \cdot 5 \cdot 6 \cdot \cos(40^\circ)$$

$$BC = \sqrt{25 + 36 - 60 \cdot \cos(40^\circ)}$$

$$BC \approx 3,9$$

**d.I.2)**

Nå som vi har lengden av siden  $BC$  kan vi bruke sinussetningen for å finne  $\angle B$

$$\frac{\sin \angle B}{AC} = \frac{\sin \angle A}{BC}$$

$$\sin \angle B = \frac{AC \cdot \sin \angle A}{BC}$$

$$\angle B = \arcsin\left(\frac{AC \cdot \sin \angle A}{BC}\right)$$

$$\angle B = \arcsin\left(\frac{5,0 \cdot \sin(40^\circ)}{3,8778}\right)$$

$$\angle B \approx 56^\circ$$

Deretter bruker vi summen av vinklene i en trekant for å finne  $\angle C$

$$\angle C = 180^\circ - (40^\circ + 56^\circ)$$

$$\angle C = 180^\circ - 96^\circ$$

$$\angle C = 84^\circ$$

**d.II.1)**

Her har vi fått oppgitt to sider, og den motstående kateten til den gitte vinkelen ( $\angle D$ ) er den minste - derfor er det to løsninger på denne. Vi bruker sinussetningen og setter

$$\begin{aligned}\frac{\sin \angle D}{EF} &= \frac{\sin \angle F_1}{DE} \\ \sin \angle F_1 &= \frac{DE \cdot \sin \angle D}{EF} \\ \angle F_1 &= \arcsin\left(\frac{DE \cdot \sin \angle D}{EF}\right) \\ \angle F_1 &= \arcsin\left(\frac{6,0 \cdot \sin(40^\circ)}{4,5}\right)\end{aligned}$$

Rundet av til én desimal, får vi

$$\angle F_1 \approx 59^\circ$$

og dermed vil  $\angle E$  være

$$\angle E_1 = 180^\circ - (40^\circ + 59^\circ) = 81^\circ$$

Da har vi den første løsningen. For å finne løsning nummer to, kan vi bruke at

$$\sin(180^\circ - \angle F_1) = \sin(\angle F_1)$$

altså er

$$\angle F_2 = 180^\circ - 59^\circ = 121^\circ$$

og da er

$$\angle E_2 = 180^\circ - (40^\circ + 121^\circ) = 180^\circ - 161^\circ = 19^\circ$$

**d.II.2)**

Vi setter

$$\frac{DF_1}{\sin \angle E_1} = \frac{EF}{\sin \angle D}$$
$$DF_1 = \frac{EF \cdot \sin \angle E_1}{\sin \angle D}$$
$$DF_1 = \frac{4,5 \cdot \sin(81^\circ)}{\sin(40^\circ)}$$
$$DF_1 \approx 6,9 \text{ cm}$$

og

$$\frac{DF_2}{\sin \angle E_2} = \frac{EF}{\sin \angle D}$$
$$DF_2 = \frac{EF \cdot \sin \angle E_2}{\sin \angle D}$$
$$DF_2 = \frac{4,5 \cdot \sin(19^\circ)}{\sin(40^\circ)}$$
$$DF_2 \approx 2,3 \text{ cm}$$

**oppgave 2****a)**

Vi teller antall 'trinn' i  $x$ - og  $y$ -retningen for hver av vektorene. Da finner vi at

$$\vec{a} = [4, 2]$$

$$\vec{b} = [-\frac{3}{2}, 3]$$

og

$$\vec{a} + \vec{b} = [4, 2] + [-\frac{3}{2}, 3] = \left[4 + (-\frac{3}{2}), 2 + 3\right] = \left[\frac{5}{2}, 5\right]$$

**b)**

Vi regner ut prikkproduktet (skalarproduktet) mellom de to vektorene

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = [4, 2] \cdot [-\frac{3}{2}, 3] = 4 \cdot (-\frac{3}{2}) + 2 \cdot 3 = -6 + 6 = 0$$

Kommentar:

$$\vec{a} \perp \vec{b}$$

fordi

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

**c)**

Linjen  $l$  er parallell med  $\vec{a}$ , altså kan vi bruke  $\vec{a}$  som retningsvektor for  $l$ . Videre er vi gitt at  $l$  går gjennom punktet  $P(2, 1)$ , hvilket gir oss

$$[x, y] = [2, 1] + [4, 2] \cdot t$$

$$x = 2 + 4t \quad \wedge \quad y = 1 + 2t$$

og linjen  $m$  er gitt ved

$$[x, y] = \left[-\frac{1}{2}, \frac{7}{2}\right] + [-\frac{3}{2}, 3] \cdot s$$

$$x = -\frac{1}{2} - \frac{3}{2}s \quad \wedge \quad y = \frac{7}{2} + 3s$$

som også kan skrives

$$x = -0,5 - 1,5s \quad \wedge \quad y = 3,5 + 3s$$

og dermed var begge parameterfremstillingene bestemt.

d)

Skjæringspunktene mellom linjene  $l$  og  $m$  finner vi ved å sette  $l = m$  og regne ut dette. Vi løser først med hensyn på  $t$

$$\begin{aligned}2 + 4t &= -0,5 - 1,5s \\4t &= -2,5 - 1,5s \\t &= \frac{-2,5 - 1,5s}{4} \\&= -0,625 - 0,375s\end{aligned}$$

deretter løser vi med hensyn på  $s$  ved å sette inn for  $t$

$$\begin{aligned}1 + 2t &= 3,5 + 3s \\1 + 2 \cdot (-0,625 - 0,375s) &= 3,5 + 3s \\1 - 1,25 - 0,75s - 3,5 &= 3s \\-3,75 &= 3,75s \\-1 &= s \\s &= -1\end{aligned}$$

setter så inn for  $s$  i likningen vi begynte med, og regner ut  $t$ .

$$\begin{aligned}t &= -0,625 - 0,375 \cdot (-1) \\&= -0,625 + 0,375 \\&= -0,250\end{aligned}$$

Deretter bruker vi  $t$  verdien vi fant i parameterfremstillingen for  $l$  og regner ut  $x$ - og  $y$ -koordinatene.

$$x = 2 + 4 \cdot (-0,250) = 2 - 1 = 1$$

$$y = 1 + 2 \cdot (-0,250) = 1 - 0,5 = 0,5$$

setter deretter prøve ved å nytte  $s$  i parameterfremstillingen for  $m$ . Hvis og bare hvis de gir like  $x$ - og  $y$ -koordinater, kan vi konkludere med at vi har funnet det riktige punktet hvor grafene skjærer hverandre. Dessuten vet vi allerede at det kun er ett skjæringspunkt, fordi begge parameterfremstillingene beskriver linære funksjoner.

$$x = -0,5 - 1,5 \cdot (-1) = -0,5 + 1,5 = 1$$

$$y = 3,5 + 3 \cdot (-1) = 3,5 - 3 = 0,5$$

altså har vi funnet skjæringspunktet  $S(1, 0,5)$

### oppgave 3

a)

Her har vi et utvalg på 15, hvorav 3 skal trekkes ut for å intervjues. Rekkefølgen spiller ingen rolle, og hvert trekk skjer uten tilbakelegg, siden man kun kan intervjues én gang.

$$\binom{15}{3} = 455$$

De tre representantene kan trekkes ut på hele 455 måter.

b)

Vi skal finne sannsynligheten for at tre av de femten representantene som trekkes ut, er av de åtte som støtter forslaget.

$$P(3 støtter) = \frac{\binom{8}{3}}{455} = \frac{56}{455} \approx 0,123$$

c)

Vi vil finne sannsynligheten for at **høyst** to av dem støtter forslaget. Det betyr at vi vil finne summen av at 0, 1 eller 2 støtter forslaget. Vi setter

$$P(\text{høyst 2 støtter}) = \sum_{x=0}^2 \frac{\binom{8}{x} \cdot \binom{7}{3-x}}{455}$$

dette regner vi ut på kalkulatoren, og da finner vi at

$$P(\text{høyst 2 støtter}) = \frac{\binom{8}{0} \cdot \binom{7}{3}}{455} + \frac{\binom{8}{1} \cdot \binom{7}{2}}{455} + \frac{\binom{8}{2} \cdot \binom{7}{1}}{455}$$

$$P(\text{høyst 2 støtter}) = \frac{35 + 168 + 196}{455} = \frac{399}{455} \approx 0,877$$

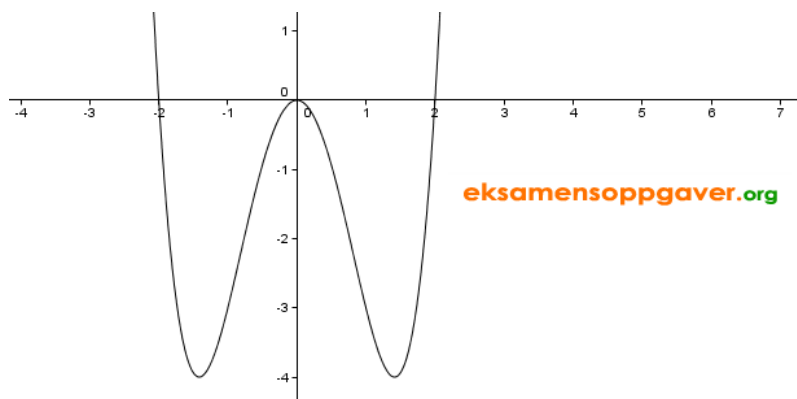
d)

Det er åtte representanter som støtter forslaget og fem som går imot, de to gjenstående har ikke bestemt seg. Dermed må vi trekke 2 fra de 8 først, og deretter 1 fra de fem. Vi får;

$$P(2 for 1 imot) = \frac{\binom{8}{2}}{\binom{15}{2}} \cdot \frac{\binom{5}{1}}{\binom{13}{1}} = \frac{28}{105} \cdot \frac{5}{13} = \frac{140}{1365} \approx 0,103$$

**oppgave 4****a)**

Her er grafen.

**b)**

Vi ser av grafen at grensene er  $x = -2$  og  $x = 2$ , videre er den symmetrisk om andreaksen, og derfor kan vi multiplisere integranden med 2 og sette nedre grense lik 0.

$$2 \cdot \int_0^2 x^4 - 4x^2 dx = 2 \cdot \left[ \frac{1}{5}x^5 - \frac{4}{3}x^3 \right]_0^2 = F(2) - F(0) =$$
$$\frac{2}{5} \cdot (2)^5 - \frac{8}{3} \cdot (2)^3 - 0 \approx -8,53$$

altså er arealet under  $x$ -aksen cirka 8,53

**c)**Vi vil derivere  $f(x)$ 

$$\begin{aligned} f'(x) &= x^4 - 4x^2 \\ &= (x^4)' - 4 \cdot (x^2)' \\ &= 4x^3 - 4 \cdot 2x \\ &= 4x^3 - 8x \end{aligned}$$

Vi finner ekstremalpunktene på  $f$  ved å sette den deriverte lik null.

$$4x^3 - 8x = 0$$

vi faktorerer

$$4x \cdot (x^2 - 2) = 0$$

videre vet vi at når en av disse faktorene er null, så er likningen sann. Altså er en valid løsning

$$4x = 0 \quad \implies \quad x = 0$$

og

$$\begin{aligned}x^2 - 2 &= 0 \\x &= \pm\sqrt{2}\end{aligned}$$

Vi har altså funnet tre  $x$ -koordinater som beskriver ekstremalpunkter på grafen til  $f$ . Nå setter vi disse verdiene inn i funksjonsuttrykket til  $f$ , slik at vi får andrekoordinatene også.

$$\begin{aligned}f(0) &= 0 \\f(\sqrt{2}) &= (\sqrt{2})^4 - 4 \cdot (\sqrt{2})^2 = 4 - 4 \cdot 2 = -4 \\f(-\sqrt{2}) &= (-\sqrt{2})^4 - 4 \cdot (-\sqrt{2})^2 = 4 - 4 \cdot 2 = -4\end{aligned}$$

Altså har vi funnet to bunnpunkter med koordinatene  $B_1(\sqrt{2}, -4)$  og  $B_2(-\sqrt{2}, -4)$ , pluss ett toppunkt med koordinatene  $T_1(0, 0)$  (i origo). Dette stemmer selvfølgelig overens med grafen vi tegnet i deloppgave a.

**d)**

Vi er gitt funksjonen

$$g(x) = 4 - x^2$$

og skal finne skjæringspunktene mellom  $f$  og  $g$ . Vi setter

$$\begin{aligned}f &= g \\x^4 - 4x^2 &= 4 - x^2 \\x^4 - 4x^2 + x^2 - 4 &= 0 \\x^4 - 3x^2 - 4 &= 0\end{aligned}$$

Så bruker vi substitusjon, og setter

$$u = x^2$$

da får vi andregradslikningen

$$u^2 - 3u - 4 = 0$$

denne løser vi med den velkjente  $abc$ -formelen.

$$u = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4)}}{2 \cdot 1}$$

$$u = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 16}}{2}$$

$$u = \frac{3 \pm 5}{2}$$

$$u_1 = 4 \quad \vee \quad u_2 = -1$$

Vi ser nå at  $u_2$  er en falsk løsning. Det er den fordi vi ikke kan ta roten av et negativt tall (det gir en kompleks løsning). Derfor tilbakesubstituerer og løser vi kun for  $u_1$

$$x^2 = 4$$

$$x = \pm 2$$

Vi har altså funnet to  $x$ -koordinater og setter inn disse i  $g$  for å få  $y$ -koordinatene

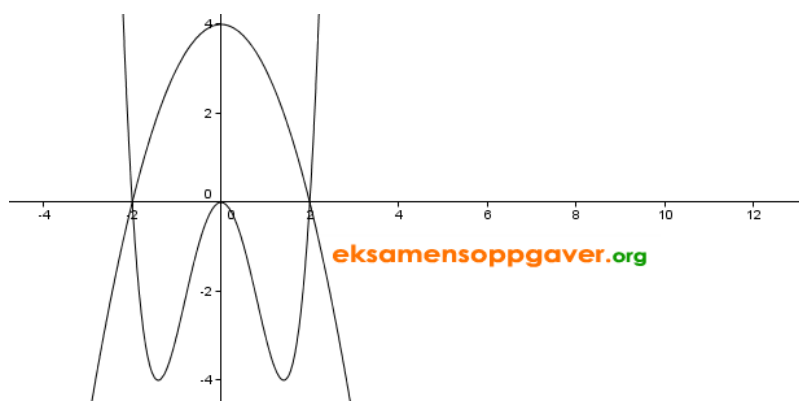
$$g(2) = 4 - (2)^2 = 0$$

$$g(-2) = 4 - (-2)^2 = 0$$

altså har vi to skjæringspunkter, nemlig  $S_1(2, 0)$  og  $S_2(-2, 0)$

e)

I deloppgave d) fant vi skjæringspunktene mellom de to grafene. Dette er også grensene for integralet. For å gjøre det litt klarere, ser vi her grafene nedenfor.

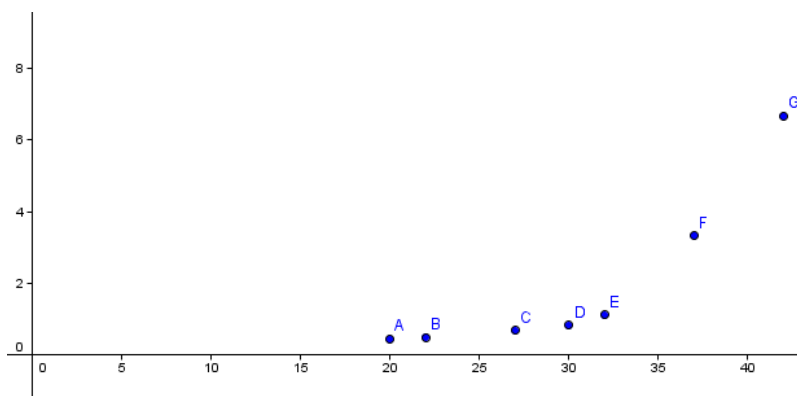


Vi har  $g$  i det samme koordinatsystemet som  $f$ , og da ser vi at  $g > f$  i hele intervallet  $x \in [-2, 2]$ . Videre ser vi at begge funksjonene er symmetriske om andreaksen, og vi kan sette integralet

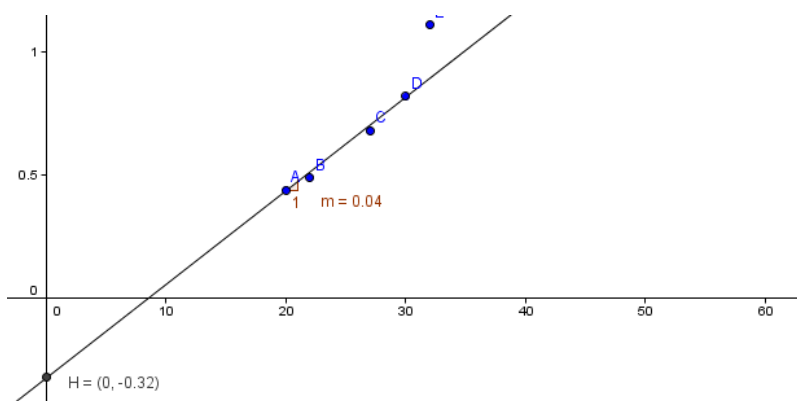
$$\begin{aligned} & 2 \cdot \int_0^2 g(x) - f(x) \, dx = \\ & 2 \cdot \int_0^2 4 - x^2 - (x^4 - 4x^2) \, dx = \\ & 2 \cdot \int_0^2 4 + 3x^2 - x^4 \, dx = 2 \cdot \left[ 4x + x^3 - \frac{1}{5}x^5 \right]_0^2 \\ & = \left[ 8x + 2x^3 - \frac{2}{5}x^5 \right]_0^2 \\ & = F(2) - F(0) \\ & = 8 \cdot 2 + 2 \cdot (2)^3 - \frac{2}{5} \cdot (2)^5 - 0 \\ & = 16 + 16 - \frac{64}{5} \\ & = \frac{96}{5} \\ & = 19,2 \end{aligned}$$

## oppgave 5

a)



b.1)



Vi ser av stigningstallet og konstanten at funksjonsuttrykket for den rette linjen blir

$$f(x) = 0,04x - 0,32$$

b.2)

$$f(25) = 0,04 \cdot 25 - 0,32 = 0,68$$

**b.3)**

Vi deriverer  $f$

$$f'(x) = 0,04(x)' - (0,32)'$$

$$f'(x) = 0,04$$

av den deriverte ser vi at tilveksten av antall 1000 barn som har denne kromosomstrukturen er 0,04 per økning i  $x$  (år). Stigningen er altså konstant, uansett morens alder. - Dette er ikke så rart, siden vi har en linær funksjon.

**c)**

Finner  $\lg y$  verdiene i tabellen ved å ta tier-logaritmen til de korresponderende tallene i den gitte tabellen. Verdiene er rundet av til fire desimaler.

$x$	32	37	42
$\lg y$	0,0453	0,5224	0,8241

Vi får her et likningssett med to ukjente, henholdsvis  $a$  og  $b$ . Jeg velger verdier for  $x = 32$  og  $x = 42$ . Jeg løser først med hensyn på  $a$

$$\begin{aligned} \lg(1,11) &= 32a + b \\ a &= \frac{\lg(1,11) - b}{32} \end{aligned} \quad (1)$$

derneft løser jeg for  $x = 42$  med hensyn på  $b$

$$\begin{aligned} \lg(6,67) &= 42a + b \\ b &= \lg(6,67) - 42a \end{aligned} \quad (2)$$

setter inn for  $b$  i (1) og løser med hensyn på  $a$ .

$$\begin{aligned} a &= \frac{\lg(1,11) - (\lg(6,67) - 42a)}{32} \\ &= \frac{\lg(1,11) - \lg(6,67) + 42a}{32} \\ 32a - 42a &= \lg\left(\frac{1,11}{6,67}\right) \\ a &= \frac{\lg\left(\frac{1,11}{6,67}\right)}{-10} \\ a &\approx 0,07788 \end{aligned}$$

og deretter setter jeg inn for  $a$  i (2) og løser med hensyn på  $b$

$$\begin{aligned} b &= \lg(6,67) - 42 \cdot (0,07788) \\ &= -2,44685 \end{aligned}$$

Vi har funnet

$$\lg y = 0,078x - 2,447$$

d)

Vi vil omforme funksjonen i c til en potensfunksjon.

$$\lg y = 0,078x - 2,447$$

$$10^{\lg y} = 10^{0,078x - 2,447}$$

$$y = 10^{0,078x - 2,447}$$

$$y = 10^{0,078x} \cdot 10^{-2,447}$$

$$y \approx 10^{(0,078) \cdot x} \cdot 0,0036$$

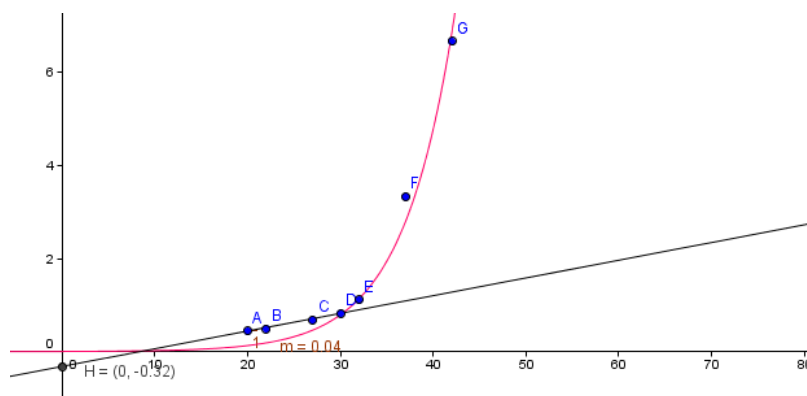
$$y \approx 0,0036 \cdot 1,197^x$$

deretter setter vi  $g(x) = y$ , og får

$$g(x) = 0,0036 \cdot 1,197^x$$

e)

Jeg tegner inn funksjonen  $g(x)$  i det samme koordinatsystemet som punktene fra a.



som vi ser av grafen ovenfor, så passer ikke  $g$  med dataene vi plottet i a før vi kommer til punkt  $D(30, 0,82)$ . Dermed passer modellen godt for

$$x \in [30, 42]$$

Dersom du er interessert, finner du flere [løsningsforslag](#) på eksamensoppgaver.org

SLUTT