

Løsningsforslag
Matematikk 2MX - AA6516 - 3. mai 2006

eksamensoppgaver.org

September 21, 2008

Om løsningsforslaget

Løsningsforslaget for matematikk eksamen i 2MX er gratis, og det er lastet ned på eksamensoppgaver.org. Løsningen er myntet på elever og privatister som vil forbrede seg til eksamen i matematikk. Lærere må gjerne bruke løsningsforslaget i undervisningsøyemed, men virksomheter har ingen rett til å anvende dokumentet.

Løsningsforslagene skal utelukkende distribueres fra nettstedet eksamensoppgaver.org, da det er viktig å kunne føye til og rette eventuelle feil i ettertid. På den måten vil alle som ønsker det, til enhver tid finne det siste oppdaterte verket. eksamensoppgaver.org ønsker videre at flest mulig skal få vite om eksamensløsningene, slik at det finnes et eget nettsted hvor man kan tilegne seg dette gratis.

Dersom du sitter på ressurser du har mulighet til å dele med deg, eller ønsker å bidra på annen måte, håper eksamensoppgaver.org på å høre fra deg.

Innholdsfortegnelse

oppgave 1	4
a.I)	4
a.II)	4
b.I)	4
b.II)	5
c.I)	5
c.II)	5
d.I)	5
d.II)	6
e.I)	6
e.II)	7
f.I.1)	7
f.I.2)	7
f.II)	7
oppgave 2	8
a)	8
b)	9
c)	9
d)	10
oppgave 3	11
a)	11
b)	11
c)	12
d)	12
oppgave 4	13
a)	13
b)	13
c)	13
d)	13
oppgave 5	14
a)	14
b)	14
c)	15
d)	15
e)	16

oppgave 1

a.I)

$$\ln x + \ln x^2 = 6$$

$$\ln x + 2 \ln x = 6$$

$$3 \ln x = 6$$

$$\ln x = 2$$

$$x = e^2$$

a.II)

$$\sqrt{3 - 2x} - x = 0$$

$$\sqrt{3 - 2x} = x$$

kvadrerer

$$3 - 2x = x^2$$

$$x^2 + 2x - 3 = 0$$

abc-formelen på lommeregneren

$$x_1 = 1 \quad \vee \quad x_2 = -3$$

Setter prøve for x_1

$$\sqrt{3 - 2 \cdot (1)} - 1 = 1 - 1 = 0$$

og så x_2

$$\sqrt{3 - 2 \cdot (-3)} - (-3) = \sqrt{3 + 6} + 3 = \sqrt{9} + 3 = 3 + 3 = 6$$

Det er kun x_1 som er riktig, x_2 er en falsk løsning.

b.I)

$$\sin x = -0.3 \quad x \in [0^\circ, 360^\circ)$$

$$x = \arcsin(-0.3)$$

$$x \approx -17.45^\circ$$

↓

$$x_1 = 180^\circ + 17.45^\circ = 197.45^\circ \quad \vee \quad x_2 = 360^\circ - 17.45^\circ = 342.45^\circ$$

Dette er de eneste løsningene i første omløp.

b.II)

$$\tan^2 x - 4 \tan x + 3 = 0 \quad x \in [0^\circ, 360^\circ)$$

$$\tan x = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2 \cdot 1}$$

$$\tan x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 12}}{2}$$

$$\tan x = \frac{4 \pm 2}{2}$$

$$\tan x = 1 \quad \vee \quad \tan x = 3$$

$$x = \arctan(1) \quad \vee \quad x = \arctan(3)$$

$$x_1 = 45^\circ + 180^\circ \cdot k \quad x_2 = 71.57^\circ + 180^\circ \cdot k \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$k = \{0, 1\} \implies x = \{45^\circ, 71.57^\circ, 225^\circ, 251.56^\circ\}$$

c.I)

$$f(x) = 3x^2 - 4x + 5$$

deriverer

$$f'(x) = 3(x^2)' - 4(x)' + (5)'$$

$$f'(x) = 6x - 4$$

c.II)

$$g(x) = 5e^{x^2+4x}$$

deriverer med kjerneregelen

$$g'(x) = 5 \cdot (e^{x^2+4x})' \cdot (x^2 + 4x)'$$

$$g'(x) = (10x + 20) e^{x^2+4x}$$

d.I)

$$h(x) = 3 \ln x^2$$

Skriver om

$$h(x) = 3 \cdot 2 \ln x$$

deriverer

$$h'(x) = 6 (\ln x)'$$

$$h'(x) = \frac{6}{x}$$

d.II)

$$k(x) = \ln \left(\frac{x^2 + 1}{2 - x} \right)$$

derivere

$$k'(x) = \left[\ln \left(\frac{x^2 + 1}{2 - x} \right) \right]' \cdot \left[\frac{x^2 + 1}{2 - x} \right]'$$

$$k'(x) = \frac{1}{\frac{x^2 + 1}{2 - x}} \cdot \left[\frac{(x^2 + 1)' \cdot (2 - x) - (x^2 + 1) \cdot (2 - x)'}{(2 - x)^2} \right]$$

$$k'(x) = \frac{2 - x}{x^2 + 1} \cdot \left[\frac{2x(2 - x) + (x^2 + 1)}{(2 - x)^2} \right]$$

$$k'(x) = \frac{2 - x}{x^2 + 1} \cdot \frac{4x - x^2 + 1}{(2 - x)^2}$$

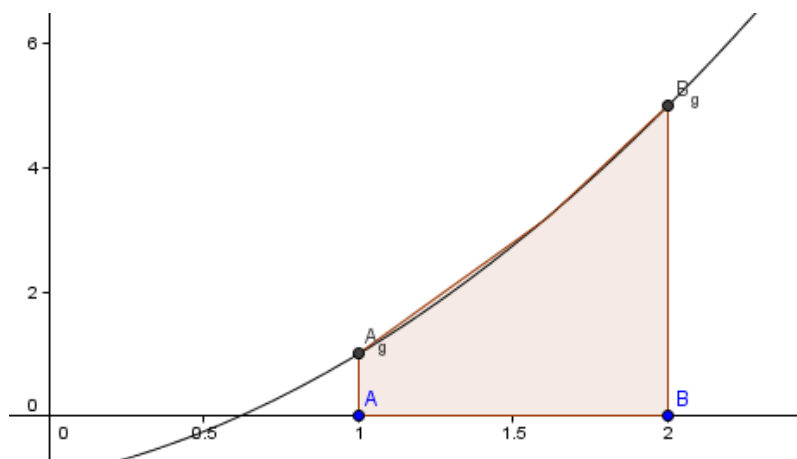
$$k'(x) = \frac{\cancel{(2 - x)} (4x - x^2 + 1)}{(x^2 + 1) (2 - x)^{\cancel{2}}}$$

$$k'(x) = \frac{4x - x^2 + 1}{(x^2 + 1) (2 - x)}$$

e.I)

$$\int_1^2 (x^2 + x - 1) dx = \left[\frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - x \right]_1^2 = F(2) - F(1) =$$

$$\left(\frac{1}{3} \cdot (2)^3 + \frac{1}{2} \cdot (2)^2 - 2 \right) - \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{2} - 1 \right) = \frac{8}{3} + \frac{1}{6} = \frac{17}{6}$$



Det markerte området avgrenset av linjene $x = 1$, $x = 2$ og $f(x)$ er en grov gjengivelse av det integralet gjør. Det er arealet av området under grafen vi finner, når vi integrerer. Vi kan se på integrasjon som en summeringsprosess av arealet av 'uendelig' små rektangler mellom x -aksen og grafen.

e.II)

$$\int_{-1}^1 (2e^{2x} - 2e^{-x}) dx = 2 \cdot \frac{1}{2} e^{2x} - 2 \cdot (-1) \cdot e^{-x} \Big|_{-1}^1 = e^{2x} + 2e^{-x} \Big|_{-1}^1 = F(1) - F(-1) =$$

$$(e^{2 \cdot 1} + 2e^{-1}) - (e^{-2} + 2e^1) = e^2 + \frac{2}{e} - \frac{1}{e^2} - 2e \approx 2.55$$

Samme slags grafisk tolkning som i e.I), men med integranden i denne oppgaven som utgangspunkt.

f.I.1)

$$A = \frac{1}{2} AC \cdot AB \sin(\angle A) = \frac{1}{2} \cdot 2.6 \cdot 3.2 \cdot \sin(29.5^\circ) \approx 2.05$$

f.I.2)

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos(\angle A)$$

$$BC = \sqrt{(3.2)^2 + (2.6)^2 - 2 \cdot (3.2) \cdot (2.6) \cdot \cos(29.5^\circ)}$$

$$BC \approx 1.6$$

f.II)

Setter følgende $AB = 63$, $AC = 47$ og $BC = 24$.

$$A = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin(\angle A)$$

dermed

$$A = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AC \cdot \sin\left(\arccos\left(\frac{BC^2 - AC^2 - AB^2}{-2AC \cdot AB}\right)\right)$$

som gir

$$A = \frac{1}{2} \cdot 63 \cdot 47 \cdot \sin\left(\arccos\left(\frac{24^2 - 47^2 - 63^2}{-2 \cdot 47 \cdot 63}\right)\right)$$

$$A = \frac{1}{2} \cdot 63 \cdot 47 \cdot \sin\left(\arccos\left(\frac{-5602}{-5922}\right)\right)$$

$$A = 1480.5 \cdot \sin\left(\arccos\left(\frac{2801}{2961}\right)\right)$$

$$A \approx 480.1 \text{m}^2$$

oppgave 2

a)

$$f(x) = x(25 - x)^3$$

derivere med kjernerregelen slik oppgaven ber om, og velger kjernen $(25 - x)$

$$f'(x) = (x)' \cdot (25 - x)^3 + x \cdot ((25 - x)^3)' \cdot (25 - x)'$$

$$f'(x) = (25 - x)^3 + x \cdot 3(25 - x)^2 \cdot (-1)$$

$$f'(x) = (25 - x)^3 - 3x \cdot (25 - x)^2$$

Trekker dette sammen

$$f'(x) = (25 - x)^2 \cdot \underbrace{(25 - x) - 3x}_{\text{trekker sammen}} \cdot (25 - x)^2$$

$$f'(x) = (25 - x)^2 \cdot (25 - 4x)$$

Finner når produksjonen er størst, da er den deriverte lik 0, altså når en av faktorene i funksjonsuttrykket er null

$$f'(x) = (25 - x)^2 \cdot (25 - 4x)$$

først

$$(25 - x)^2$$

som gir

$$25 - x = 0$$

og løser med hensyn på x

$$x_1 = 25$$

og så den andre faktoren

$$25 - 4x = 0$$

$$x_2 = \frac{-25}{-4} = 6.25$$

Ved å sette disse x -verdiene inn i $f(x)$ ser vi straks om ekstremalpunktet er et topp- eller bunnpunkt.

$$f(25) = 25 \cdot (25 - 25)^3 = 0$$

$$f(6.25) = 6.25 \cdot (25 - 6.25)^3 = 41198.74047$$

Den 6 dagen er altså produksjonen størst.

b)

Produksjonen avtar raskest i et vendepunkt når grafen til $f(x)$ går nedover. Vi dobbeltderiverer. Skriver først $f'(x)$ slik

$$f'(x) = 25(25 - x)^2 - 4x(25 - x)^2$$

$$f'(x) = 25(625 - 50x + x^2) - 4x(625 - 50x + x^2)$$

$$f'(x) = 15625 - 1250x + 25x^2 - 2500x + 200x^2 - 4x^3$$

trekker sammen

$$f'(x) = -4x^3 + 225x^2 - 3750x + 15625$$

som vi deriverer og får

$$f''(x) = -4 \cdot 3x^2 + 225 \cdot 2x - 3750 \cdot 1$$

$$f''(x) = -12x^2 + 450x - 3750$$

Vi setter $f''(x) = 0$ og dermed x -verdiene til vendepunktene til $f(x)$

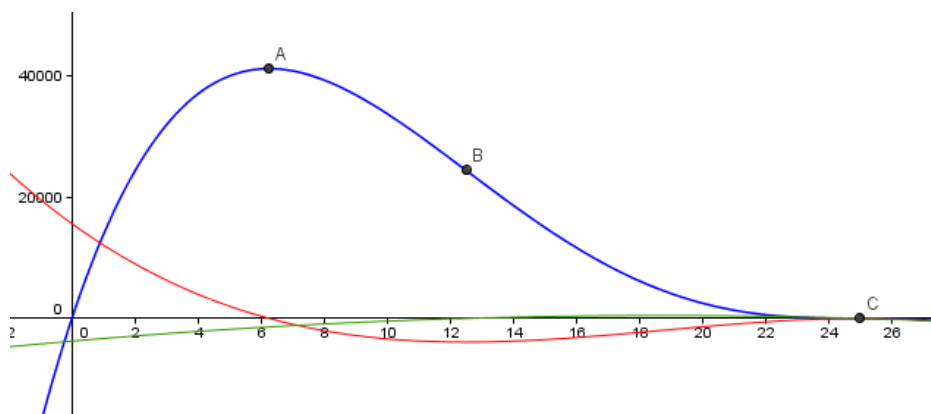
$$-12x^2 + 450x - 3750 = 0$$

abc-formelen gir oss

$$x_1 = 12.5 \quad \vee \quad x_2 = 25$$

Produksjonen avtar raskest den 12 og 25 dagen. Den 25 dagen stopper funksjonen å uttrykke produksjonen.

c)



d)

Vil vil bestemme

$$\int_0^{25} f(x) dx$$

først skriver jeg om integranden til

$$f(x) = -x^4 + 75x^3 - 1875x^2 + 15625x$$

og integrerer

$$\int_0^{25} (-x^4 + 75x^3 - 1875x^2 + 15625x) dx = \left[-\frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{4} \cdot 75x^4 - \frac{1}{3} \cdot 1875x^3 + \frac{1}{2} \cdot 15625x^2 \right]_0^{25} =$$

$$\left[-\frac{1}{5}x^5 + 18.75x^4 - 625x^3 + 7812.5x^2 \right]_0^{25} = F(25) - F(0) = 3710937.5$$

Svaret forteller oss hvor stor produksjonen i kg var fra og med dag 0 til og med dag 25.

oppgave 3

a)

Halvsirkelen har sentrum i origo $O(0,0)$ og Q ligger lengden av radius r til høyre for O . På x -aksen er alltid y -koordinaten null. Dermed blir $Q(r,0)$. Når det gjelder P ligger dette punktet også på x -aksen, og følgelig er y -koordinaten lik null. Punktet ligger dog til venstre for origo, og da får vi $P(-r,0)$. Punktet R ligger også på sirkelperiferien, dermed vil lengden av vektoren \overrightarrow{OR} alltid være lik r . Drar vi ei linje fra O til R , får vi hypotenusen i en rettvinklet trekant. $r = \sqrt{x^2 + y^2}$, der x og y er lengden i hver retning langs aksene.

b)

$$\overrightarrow{RP} = \overrightarrow{RO} + \overrightarrow{OP}$$

Vektoren \overrightarrow{RP} er summen av vektorene \overrightarrow{RO} og \overrightarrow{OP} . En kan se på det som å gå fra R til O og deretter fra O til P . Avstanden bevegelse man da har tilbakelagt, i en rettlinjert og fra R til P , vil ha retningen \overrightarrow{RP} og samme lengde som denne vektoren.

$$\overrightarrow{RQ} = \overrightarrow{RO} - \overrightarrow{OP}$$

Vi vet at dette også kan skrives

$$\overrightarrow{RQ} = \overrightarrow{RO} + (-\overrightarrow{OP})$$

Dessuten ser vi at P og R har samme avstand fra O , nemlig r . Derfor er

$$-\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OQ}$$

c)

$$\overrightarrow{RP} \perp \overrightarrow{RQ}$$

Fordi

$$\begin{aligned} (\overrightarrow{RO} + \overrightarrow{OP}) \cdot (\overrightarrow{RO} - \overrightarrow{OP}) \\ \overrightarrow{RO}^2 - \overrightarrow{OP}^2 \end{aligned}$$

altså skalarproduktet av hver vektor, som gir

$$|\overrightarrow{RO}|^2 - |\overrightarrow{OP}|^2$$

av dette følger det at

$$\begin{aligned} \sqrt{r^2} - \sqrt{r^2} \\ r - r \\ 0 \end{aligned}$$

Dermed er vektorene ortogonale.

d)

Geometrisk betyr det at uavhengig av hvor punktet R befinner seg på den halve sirkelperiferien, så vil det dannes en rettvinklet trekant med grunnlinjen PQ .

oppgave 4

- 11 spillere
- 4 gutter
- 7 jenter

a)

J = 'Antall jenter'

$$P(J = 0) = \frac{\binom{4}{3} \cdot \binom{7}{0}}{\binom{11}{3}} = \frac{4}{165} \approx 0.024$$

b)

$$P(J \geq 1) = 1 - P(J = 0)$$
$$P(J \geq 1) = 1 - \frac{\binom{7}{0} \cdot \binom{4}{3}}{\binom{11}{3}} = \frac{161}{165} \approx 0.976$$

c)

$$P(J = 2) = \frac{\binom{4}{1} \cdot \binom{7}{2}}{\binom{11}{3}} = \frac{4 \cdot 21}{165} = \frac{84}{165} = \frac{28}{55} \approx 0.509$$

d)

Vi finner den betingede sannsynligheten for hendelsen slik

$$P(J = 2 | J \geq 1) = \frac{P(J = 2)}{P(J \geq 1)} = \frac{\frac{84}{165}}{\frac{161}{165}} = \frac{84}{161} = \frac{12}{23} \approx 0.522$$

oppgave 5

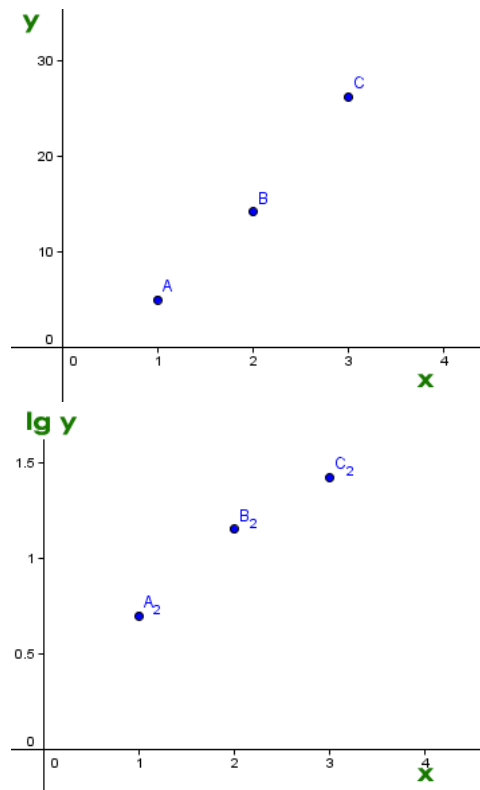
a)

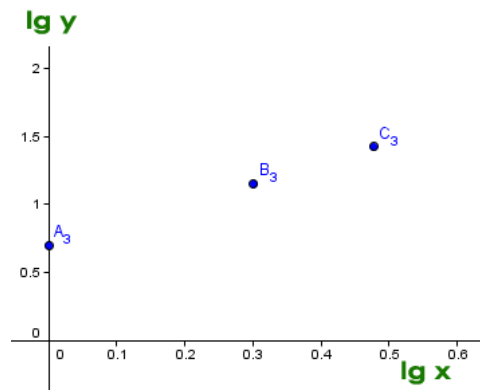
Bruker kalkulatoren til å regne ut de logaritmiske verdiene i tabellen. Disse er rundet av til 4 desimaler, men utregninger er gjort med flere desimaler.

x (uke nr.)	1	2	3
y (høyde i cm)	5	14.2	26.5
$\lg x$	0	0.3010	0.4771
$\lg y$	0.6990	1.1523	1.4232

b)

Tegner ikke grafene slik oppgaven ber om, men viser hvordan punktene ligger.





c)

Det er tydelig at det er den tredje, og siste, modellen med logaritmisk x - og y -akse passer best med dataene. Dette fordi dataene i dette koordinatsystemet ligger på ei rett linje. Når vi har en funksjon der $(\lg x, \lg y)$ passer bra med ei rett linje, da har vi også funnet at dataene passer bra med en potensfunksjon. - Dette bekreftes også av lommeregneren dersom vi utfører regresjon på de opprinnelige punktene i tabellen.

d)

Utfører regresjonen manuelt, slik $A_3(0, 0.6990)$ og $C_3(0.4771, 1.4232)$ stigningstallet a til linjen mellom punktene finner vi slik:

$$a = \frac{\Delta \lg y}{\Delta \lg x} = \frac{1.4232 - 0.6990}{0.4771 - 0} = \frac{0.7242}{0.4771} \approx 1.51792$$

Videre, kan vi bruke ettpunktsformelen for ei rett linje.

$$\lg y - y_1 = a(\lg x - x_1)$$

og får

$$\lg y - 0.6990 = 1.51792(\lg x - 0)$$

$$\lg y = 1.51792 \lg x + 0.6990$$

Så former vi om uttrykket til en potensfunksjon

$$10^{1.51792 \lg x + 0.6990} = 10^{0.6990} \cdot (10^{\lg x})^{1.51792} \approx 5 \cdot x^{1.518}$$

altså

$$f(x) = 5 \cdot x^{1.518}$$

e)

$$5 \cdot x^{1.518} = 75$$

$$x^{1.518} = \frac{75}{5}$$

$$x = \sqrt[1.518]{15} \approx 5.95$$

Det tar ca 6 uker som vi ser fra modellen.

Dersom du er interessert, finner du flere [løsningsforslag](https://www.gaver.org) på eksamensopp-gaver.org

SLUTT