

Løsningsforslag  
AA6516 Matematikk 2MX - 08. desember 2004

[eksamensoppgaver.org](http://eksamensoppgaver.org)

## Om løsningsforslaget

Løsningsforslaget for matematikk eksamen i 2MX er gratis, og det er lastet ned på [eksamensoppgaver.org](http://eksamensoppgaver.org). Løsningen er myntet på elever og privatister som vil forbrede seg til eksamen i matematikk. Lærere må gjerne bruke løsningsforslaget i undervisningsøyemed, men virksomheter har ingen rett til å anvende dokumentet.

Løsningsforslagene skal utelukkende distribueres fra nettstedet [eksamensoppgaver.org](http://eksamensoppgaver.org), da det er viktig å kunne føye til og rette eventuelle feil i ettertid. På den måten vil alle som ønsker det, til enhver tid finne det siste oppdaterte verket. [eksamensoppgaver.org](http://eksamensoppgaver.org) ønsker videre at flest mulig skal få vite om eksamensløsningene, slik at det finnes et eget nettsted hvor man kan tilegne seg dette gratis.

Dersom du sitter på ressurser du har mulighet til å dele med deg, eller ønsker å bidra på annen måte, håper [eksamensoppgaver.org](http://eksamensoppgaver.org) på å høre fra deg.

## Innholdsfortegnelse

<b>oppgave 1</b>	<b>4</b>
a.I.1)	4
a.I.2)	4
a.II.1)	5
a.II.2)	6
b.I.1)	6
b.I.2)	7
b.II.1)	7
b.II.2)	7
c.I)	7
c.II)	8
d.1)	8
d.2)	8
e.I)	9
e.II)	9
<b>oppgave 2</b>	<b>10</b>
a)	10
b)	10
c)	11
d)	11
<b>oppgave 3</b>	<b>12</b>
a)	12
b)	12
c)	13
d)	13
<b>oppgave 4</b>	<b>14</b>
a)	14
b)	15
c)	16
d)	16
<b>oppgave 5</b>	<b>17</b>
a)	17
b)	17
c)	17
d)	17

**oppgave 1****a.I.1)**

$$\lg(x - 3) = 2$$

$$10^{\lg(x-3)} = 10^2$$

$$x - 3 = 100$$

$$x = 103$$

**a.I.2)**

$$\tan x = -3 \quad x \in [0^\circ, 360^\circ)$$

$$x = \arctan(-3)$$

$$x = -\arctan(3)$$

$$x \approx -71,6^\circ$$

Vi ser at løsningen ligger i 4. kvadrant, derfor setter vi

$$x \approx 360^\circ - 71,6^\circ = 288,4^\circ$$

og

$$x \approx 180^\circ - 71,6^\circ = 108,4^\circ$$

**a.II.1)**

$$1 + \sqrt{x+1} = x$$

$$\sqrt{x+1} = x - 1$$

kvadrerer

$$x + 1 = (x - 1)^2$$

$$x + 1 = x^2 - 2x + 1$$

$$0 = x^2 - 3x$$

faktorerer

$$x(x - 3) = 0$$

vi får løsningene

$$x = 0 \quad \vee \quad x = 3$$

Da vi kvadrerte tidligere, er det viktig å sette prøve på svarene, slik at vi unngår falske løsninger.

$$1 + \sqrt{0+1} = 0$$

$$1 + \sqrt{1} = 0$$

$$2 \neq 0$$

da har vi konkludert at  $x = 0$  er en falsk løsning. Vi prøver med  $x = 3$

$$1 + \sqrt{3+1} = 3$$

$$1 + \sqrt{4} = 3$$

$$3 = 3$$

Ja,  $x = 3$  er en valid løsning.

**a.II.2)**

$$3 \cos^2 x - 4 \cos x - 4 = 0 \quad x \in [0^\circ, 360^\circ)$$

vi bruker *abc*-formelen og løser med hensyn på  $\cos x$

$$\begin{aligned} \cos x &= \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-4)}}{2 \cdot 3} \\ &= \frac{4 \pm \sqrt{16 + 48}}{6} \\ &= \frac{4 \pm \sqrt{64}}{6} \\ &= \frac{4 \pm 8}{6} \\ &= 2 \quad \vee \quad = -\frac{2}{3} \end{aligned}$$

Vi ser umiddelbart at  $\cos x = 2$  ikke gir noen løsning, dog løser vi for

$$\begin{aligned} \cos x &= -\frac{2}{3} \\ x &= \arccos\left(-\frac{2}{3}\right) \\ x &= \arccos\left(-\frac{2}{3}\right) \\ x &\approx 131,8^\circ \end{aligned}$$

I tillegg har vi en løsning til, nemlig

$$x \approx 360^\circ - 131,8^\circ = 228,2^\circ$$

**b.I.1)**

Vi skal derivere

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2}x^4 - 3x + 2 \\ f'(x) &= \frac{1}{2} \cdot (x^4)' - 3 \cdot (x)' + (2)' \\ &= \frac{1}{2} \cdot 4x^3 - 3 \cdot 1 \\ &= 2x^3 - 3 \end{aligned}$$

**b.I.2)**

$$\begin{aligned}h(x) &= 2 \ln x^3 \\ &= 2 \cdot 3 \ln x \\ &= 6 \ln x \\ h'(x) &= 6 \cdot (\ln x)' \\ &= \frac{6}{x}\end{aligned}$$

**b.II.1)**

Vi deriverer med kjerneregelen

$$\begin{aligned}g(x) &= \sqrt{3x^2 + x} \\ g'(x) &= \left(\sqrt{3x^2 + x}\right)' \cdot (3x^2 + x)' \\ &= \frac{1}{2\sqrt{3x^2 + x}} \cdot (3 \cdot 2x + 1) \\ &= \frac{6x + 1}{2\sqrt{3x^2 + x}}\end{aligned}$$

**b.II.2)**

Vi deriverer med kvotientregelen og summen av to deriverte.

$$\begin{aligned}k(x) &= 3 + \frac{e^x}{1 + e^x} \\ k'(x) &= (3)' + \frac{(e^x)' \cdot (1 + e^x) - e^x \cdot (1 + e^x)'}{(1 + e^x)^2} \\ &= \frac{e^x \cdot (1 + e^x) - e^x \cdot e^x}{(1 + e^x)^2} \\ &= \frac{e^x + e^{2x} - e^{2x}}{(1 + e^x)^2} \\ &= \frac{e^x}{(1 + e^x)^2}\end{aligned}$$

**c.I)**

Vi bestemmer det uegentlige integralet

$$\begin{aligned}\int (x^2 + 3x - 2) dx &= \frac{x^{2+1}}{2+1} + \frac{3x^{1+1}}{1+1} - 2x \\ &= \frac{1}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 2x + C\end{aligned}$$

**c.II)**

Vi løser integralet

$$\begin{aligned}\int_0^1 (e^{3x} + 2e^{-x}) dx &= \frac{1}{3}e^{3x} + 2 \cdot (-1) \cdot e^{-x} \Big|_0^1 \\ &= \frac{1}{3}e^{3x} - 2e^{-x} \\ &= F(1) - F(0) \\ &= \left(\frac{1}{3}e^3 - 2e^{-1}\right) - \left(\frac{1}{3} - 2\right) \\ &= \frac{e^3}{3} - \frac{2}{e} - \frac{1}{3} + 2 \\ &\approx 7,63\end{aligned}$$

**d.1)**

Her spiller ikke rekkefølgen av kortene noen rolle, og de trekkes uten tilbakelegg. Vi innfører  $X =$  'Antall hjertekort'

$$P(X = 3) = \frac{\binom{13}{3} \cdot \binom{52-13}{5-3}}{\binom{52}{5}} = \frac{\binom{13}{3} \cdot \binom{39}{2}}{2598960} = \frac{286 \cdot 741}{2598960} = \frac{211926}{2598960} \approx 0,082$$

**d.2)**

Her har vi 10 oppgaver, der hver av dem har 3 alternativer. Da vedkommende ikke har øvd, kan vi si at sannsynligheten for å tippe riktig på én oppgave er  $1/3$  og sannsynligheten for å tippe feil er  $2/3$ . Vi innfører  $Y =$  'Antall riktig besvart', og vil finne sannsynligheten for at vedkommende får minst 5 riktige.

$$P(Y \geq 5) = \sum_{i=5}^{10} \binom{10}{i} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^i \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{10-i}$$

dette regner vi på kalkulatoren, og da får vi

$$P(Y \geq 5) \approx 0,213$$

**e.I)**

Vi bruker cosinussetningen for å finne  $BC$

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos(\angle A)$$

$$BC = \sqrt{AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos(\angle A)}$$

setter inn verdier og løser

$$BC = \sqrt{253^2 + 148^2 - 2 \cdot 253 \cdot 148 \cdot \cos(43,1^\circ)}$$

tar dette på kalkulatoren og runder av til hele meter.

$$BC \approx 177 \text{ m}$$

**e.II)**

Vi er gitt sidene i en trekantet tomt, alle mål i meter. 47, 34 og 63. Vi vil finne arealet av tomten. Jeg velger å bruke cosinussetningen for å finne en av vinklene i den trekantede tomten, og jeg kaller den for  $\triangle ABC$  med sidene  $a$ ,  $b$  og  $c$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cdot \cos \angle A$$

løser med hensyn på  $\angle A$

$$\cos \angle A = \frac{a^2 - b^2 - c^2}{-2bc}$$

$$\angle A = \arccos\left(\frac{a^2 - b^2 - c^2}{-2bc}\right)$$

setter inn verdiene og løser.

$$\angle A = \arccos\left(\frac{47^2 - 34^2 - 63^2}{-2 \cdot 34 \cdot 63}\right)$$

$$\angle A = \arccos\left(\frac{-2916}{-4284}\right)$$

$$\angle A = \arccos\left(\frac{81}{119}\right)$$

$$\angle A \approx 47,1^\circ$$

Deretter bruker vi arealsetningen.

$$\begin{aligned} A_{\triangle} &= \frac{1}{2} \cdot 34 \cdot 63 \cdot \sin 47,1^\circ \\ &= 1071 \cdot \sin 47,1^\circ \\ &\approx 785 \text{ m}^2 \end{aligned}$$

## oppgave 2

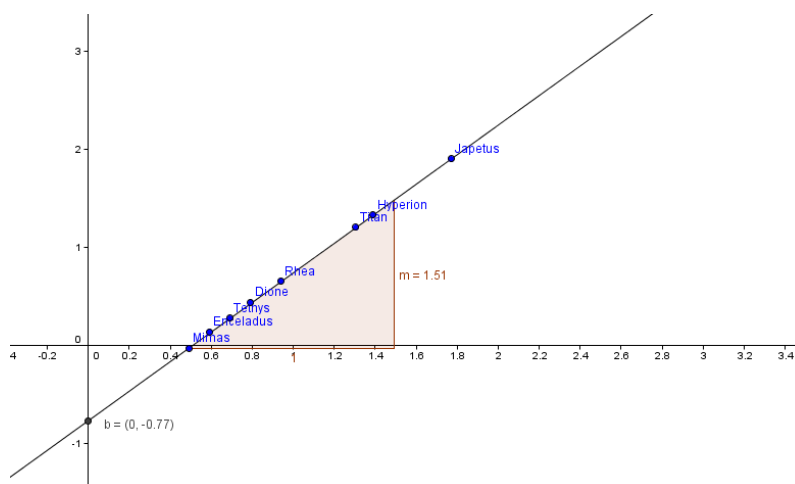
a)

Jeg plotter alle verdiene i denne tabellen i 'STAT' menyen på min Casio fx-9750G Plus kalkis, deretter tar jeg logaritmene av verdiene ved hjelp av lister. De logaritmiske verdiene i tabellen er rundet av til 3 desimaler.

Navn	Avstanden $x$ målt i saturnradier	Omløpstiden $T$ målt i døgn	$\lg x$	$\lg T$
Mimas	3,1	0,94	0,4914	-0,0269
Enceladus	3,9	1,37	0,5911	0,1367
Tethys	4,9	1,89	0,6902	0,2765
Dione	6,2	2,74	0,7924	0,4378
Rhea	8,7	4,52	0,9395	0,6551
Titan	20,2	15,95	1,3054	1,2028
Hyperion	24,5	21,28	1,3892	1,3279
Japetus	58,9	79,33	1,7701	1,8994

b)

Tegner inn punktene i koordinatsystem. Aksene er logaritmiske.



Som vi ser av tegningen ovenfor, så er  $m = a = 1,51$  og  $b = -0,77$ . Disse verdiene passer også godt med linær regresjon på de samme punktene på lommeregneren. Faktisk gir den litt mer nøyaktige verdier, nemlig  $a \approx 1,501$  og  $b \approx -0,757$ . Vi bruker de sistnevnte verdiene for å unngå eventuelle småfeil som følger videre i oppgaven.

$$\lg T = 1,501 \cdot \lg x - 0,757$$

c)

Vi vil skrive om funksjonsuttrykket i oppgave b på formen

$$T(x) = A \cdot x^B$$

altså som en potensfunksjon. (Dette er en god modell, da de logaritmiske punktene i a passer fint med en linær funksjon.) Vi begynner med funksjonsuttrykket vi fant ved regresjon i deloppgave b.

$$\lg T = 1,501 \cdot \lg x - 0,757$$

$$10^{\lg T} = 10^{1,501 \cdot \lg x - 0,757}$$

$$T = 10^{1,501 \cdot \lg x} \cdot 10^{-0,757}$$

$$T = 10^{(1,501) \cdot \lg x} \cdot 0,175$$

$$T(x) = 0,175 \cdot x^{1,501}$$

OBS: Verdiene ovenfor er rundet av underveis.

d)

Vi er gitt Phoebes omløpstid (427,5 døgn) og skal bestemme avstanden til Saturn.

$$0,175 \cdot x^{1,501} = 427,5$$

$$x^{1,501} = \frac{427,5}{0,175}$$

$$x = \sqrt[1,501]{\frac{427,5}{0,175}}$$

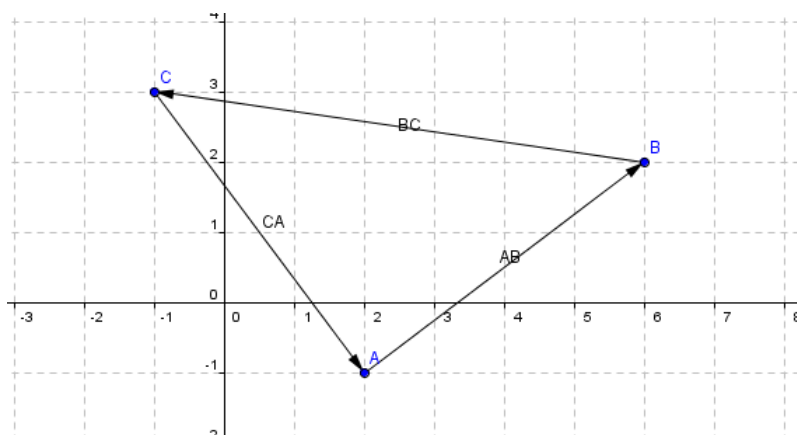
$$x \approx 180,8$$

Phobe er omlag 180,8 saturnradier unna Saturn.

### oppgave 3

a)

som vi ser av koordinatsystemet nedenfor



er punktene gitt ved  $B(6, 2)$  og  $C(-1, 3)$

b)

Vi skal undersøke om trekanten  $\triangle ABC$  er rettvinklet. Det kan vi gjøre ved å se om skalarproduktet mellom noen av vektorene som danner den er lik 0.

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = [4, 3] \cdot [-7, 1] = -28 + 3 = -25$$

bestemmer  $\overrightarrow{AC}$

$$\overrightarrow{AC} = [-1 - 2, 3 - (-1)] = [-3, 4]$$

og sjekker om dottproduktet er lik 0

$$\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{AB} = [-3, 4] \cdot [4, 3] = -12 + 12 = 0 \implies \overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{AB}$$

Ja, vi har påvist ortogonalitet, og trekanten er rettvinklet.

c)

For å lage et parallellogram, må vi bestemme  $D$  slik at  $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$  og  $\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AC}$ . Altså finner vi  $D$  ved

$$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{AB} = [-1, 3] + [4, 3] = [3, 6] \quad \implies \quad D(3, 6)$$

d)

Finner først retningsvektoren for linja (som jeg kaller  $\ell$ ).

$$\vec{v} = [3 - (-1), 6 - 3] = [4, 3]$$

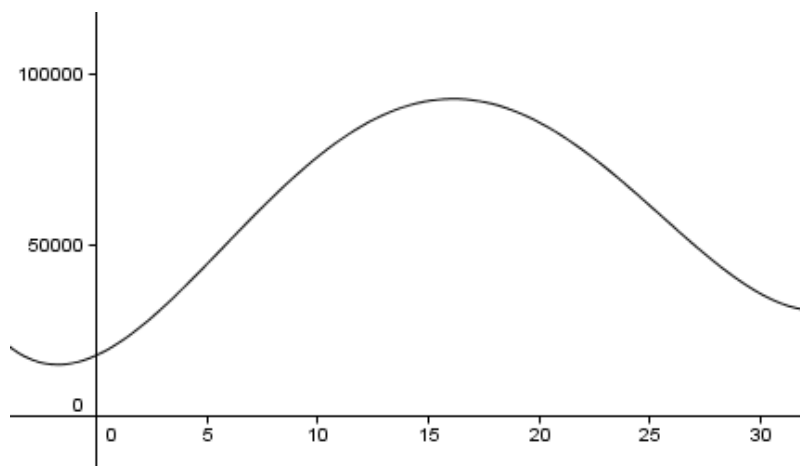
vi vet også at den går gjennom både  $C$  og  $D$ , og jeg velger  $D$  som 'forankringspunkt'. Da får vi parameterfremstillingen

$$\begin{aligned} [x, y] &= [3, 6] + [4, 3] \cdot t \\ x &= 3 + 4t \quad \vee \quad y = 6 + 3t \end{aligned}$$

## oppgave 4

a)

Her skal man egentlig 'skissere' grafen, ikke tegne den. Jeg ville ha tegnet den på kalkulatoren, funnet topp- og bunnpunkter, i tillegg til eventuelle nullpunkter. Deretter ville jeg markert disse i et koordinatsystem og etter beste evne dratt linjer gjennom dem. Men, her er grafen tegnet i all sin prakt.



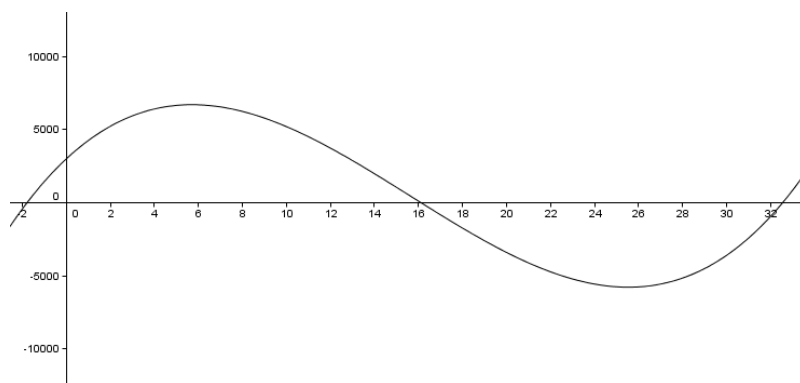
Jeg finner toppunktet i intervallet  $x \in [0, 30]$  ved å grafe den på lommerekneren og bruke 'MAX' under 'G-Solve' i 'GRPH'-menyen. Da finner jeg punktet  $T(16, 114, 92834, 9)$  - det tok altså omlag 16 timer før vannføringen var på det største.

b)

Deriverer  $V(x)$

$$\begin{aligned}V(x) &= 0,8x^4 - 50x^3 + 700x^2 + 3000x + 18000 \\V'(x) &= 0,8 \cdot 4x^3 - 50 \cdot 3x^2 + 700 \cdot 2x + 3000 \cdot 1 + 0 \\&= 3,2x^3 - 150x^2 + 1400x + 3000\end{aligned}$$

skriver inn og grafer funksjonsuttrykket.



Vi kunne funnet ekstremalpunktene på  $V$  ved å observere når  $V' = 0$ . I vår søken på toppunktet, ser vi at dette ligger omtrent ved  $x = 16$  slik som nevnt i deloppgave a).

c)

Den deriverte forteller hvor mye vannføringen øker for hver  $x$  (time). Dermed kan vi finne når vannføringen øker raskest ved å dobbeltderivere og sette den dobbeltderiverte lik 0. Vi vil da finne ekstremalpunktene på den deriverte, og vendepunktene på  $V$ .

$$\begin{aligned} V'(x) &= 3,2x^3 - 150x^2 + 1400x + 3000 \\ V''(x) &= 3,2 \cdot 3x^2 - 150 \cdot 2x + 1400(x)' + (3000)' \\ &= 9,6x^2 - 300x + 1400 \end{aligned}$$

Og deretter setter vi den dobbeltderiverte lik null og løser med hensyn på  $x$

$$\begin{aligned} 9,6x^2 - 300x + 1400 &= 0 \\ x &= \frac{-(-300) \pm \sqrt{(-300)^2 - 4 \cdot 9,6 \cdot 1400}}{2 \cdot 9,6} \\ x &= \frac{300 \pm \sqrt{36240}}{19,2} \\ x &\approx \frac{300 \pm 190,37}{19,2} \\ x_1 &\approx 5,7 \quad \vee \quad x_2 \approx 25,5 \end{aligned}$$

Vi ser av grafen i deloppgave a at grafen er stigende ved  $x_1$ , mens den synker ved  $x_2$ , derfor økte vannføringen raskest omkring  $x_1$ , altså etter cirka 5,7 timer.

d)

Vi vil finne hvor mye vann som rant forbi målepunktene de 30 første timene. Altså har vi et integral med øvre grense lik 30 og nedre grense lik 0. Videre er det  $V$  som er integranden. Vi regner ut antall  $\text{m}^3$  vann slik;

$$\begin{aligned} \int_0^{30} 0,8x^4 - 50x^3 + 700x^2 + 3000x + 18000 &= \frac{0,8}{5}x^5 - \frac{50}{4}x^4 + \frac{700}{3}x^3 + \frac{3000}{2}x^2 + 18000x \Big|_0^{30} \\ &= 0,16x^5 - 12,5x^4 + 233,3x^3 + 1500x^2 + 18000x \Big|_0^{30} \end{aligned}$$

fordi jeg er en av verden lateste menn, så bruker jeg lommeregneren for å evaluere grensene. Da finner vi at integralet  $I$  er

$$I = 1953000 \text{ m}^3$$

**oppgave 5****a)**

Her har vi to delmengder, henholdsvis gutter og jenter. Rækkefølgen spiller ingen trille, og vi 'trekker' uten tilbakelegg. Dette er grunnen til at jeg nytter hypergeometrisk fordelingsmodell.

$$P(3G \cap 3J) = \frac{\binom{15}{3} \cdot \binom{11}{3}}{\binom{26}{6}} = \frac{455 \cdot 165}{230230} = \frac{75075}{230230} \approx 0,326$$

**b)**

$P(A \cap B)$  betyr: Sannsynligheten for at en tilfeldig valgt elev både er en gutt og at han røyker.

$$P(A \cap B) = \frac{50}{432} \approx 0,116$$

**c)**

$$P(B) = \frac{50}{432} + \frac{62}{432} = \frac{112}{432} \approx 0,259$$

$$P(B|A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{50}{432}}{\frac{208}{432}} = \frac{50}{208} \approx 0,240$$

Nei,  $P(B|A) \neq P(B)$ , så  $A$  og  $B$  er avhengige hendelser.

**d)**

Jeg antar at de først trekker én røyker fra mengden av røykere, så én ikke-røyker fra mengden av ikke-røykere.

$$P(JR \cap J\bar{R}) = \frac{62}{50 + 62} \cdot \frac{224 - 62}{432 - (50 + 62)} = \frac{62}{112} \cdot \frac{162}{320} \approx 0,280$$

Dersom du er interessert, finner du flere [løsningsforslag](http://eksamensoppgaver.org) på eksamensoppgaver.org

SLUTT