

Løsningsforslag
AA6516 Matematikk 2MX - 07. desember 2005

eksamensoppgaver.org

Om løsningsforslaget

Løsningsforslaget for matematikk eksamen i 2MX er gratis, og det er lastet ned på eksamensoppgaver.org. Løsningen er myntet på elever og privatister som vil forbrede seg til eksamen i matematikk. Lærere må gjerne bruke løsningsforslaget i undervisningsøyemed, men virksomheter har ingen rett til å anvende dokumentet.

Løsningsforslagene skal utelukkende distribueres fra nettstedet eksamensoppgaver.org, da det er viktig å kunne føye til og rette eventuelle feil i ettertid. På den måten vil alle som ønsker det, til enhver tid finne det siste oppdaterte verket. eksamensoppgaver.org ønsker videre at flest mulig skal få vite om eksamensløsningene, slik at det finnes et eget nettsted hvor man kan tilegne seg dette gratis.

Dersom du sitter på ressurser du har mulighet til å dele med deg, eller ønsker å bidra på annen måte, håper eksamensoppgaver.org på å høre fra deg.

Innholdsfortegnelse

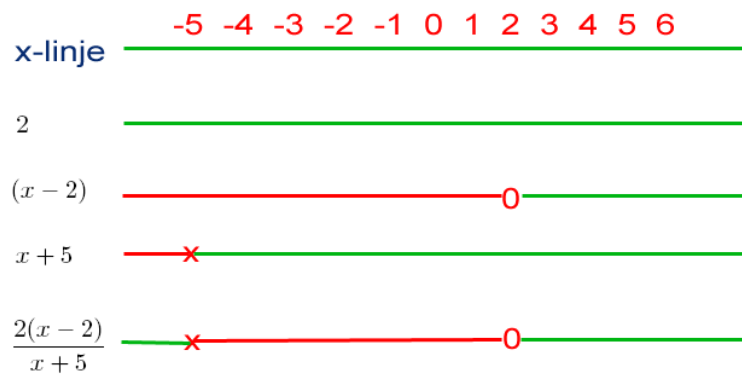
oppgave 1	4
a.I)	4
a.II)	5
b.I)	5
b.II)	6
c.I)	6
c.II)	7
d.I)	7
d.II)	8
e.I)	8
e.II)	8
f.I.1)	9
f.I.2)	9
f.II.1)	9
f.II.2)	9
oppgave 2	10
a)	10
b)	10
c)	11
d)	12
oppgave 3	13
a)	13
b)	13
c)	14
d)	14
e)	15
oppgave 4	16
a)	16
b)	16
c)	17
d)	17
e)	17
f)	18
oppgave 5	19
a)	19
b)	19
c)	20
d)	20

oppgave 1

a.I)

Vi har ulikheten

$$\frac{2x - 4}{x + 5} > 0$$
$$\frac{2(x - 2)}{x + 5} > 0$$



Så da ser vi at løsningen på denne ulikheten blir

$$x \in \langle \leftarrow, -5 \rangle \cup \langle 2, \rightarrow \rangle$$

a.II)

Vi har ulikheten

$$10 - x^2 > 3x$$

og ordner den.

$$10 - x^2 - 3x > 0$$

Deretter setter vi venstresiden lik 0 og løser den med *abc*-formelen.

$$\begin{aligned} x &= \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot (-1) \cdot 10}}{2 \cdot (-1)} \\ &= \frac{3 \pm \sqrt{9 + 40}}{-2} \\ &= \frac{3 \pm \sqrt{49}}{-2} \\ &= \frac{3 \pm 7}{-2} \\ &= -5 \quad \vee \quad 2 \end{aligned}$$

Ulikheten er altså lik 0 ved $x = \{-5, 2\}$, videre ser vi av funksjonsuttrykket at grafen er en parabel med den hule siden opp, dermed er ulikheten sann for

$$x \in \langle \leftarrow, -5 \rangle \cup \langle 2, \rightarrow \rangle$$

b.I)

$$2 \sin x = 1 \quad x \in [0^\circ, 360^\circ)$$

$$\sin x = \frac{1}{2}$$

$$x = \arcsin\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$x = 30^\circ$$

og

$$x_2 = 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$$

b.II)

$$\sin x + 2 \cos x = 0 \quad x \in [0^\circ, 360^\circ)$$

$$\sin x = -2 \cos x$$

forutsetter at $\cos x \neq 0$ og dividerer

$$\frac{\sin x}{\cos x} = \frac{-2 \cos x}{\cos x}$$

$$\tan x = -2$$

$$x = \arctan(-2)$$

$$x \approx -63,4^\circ$$

dette er ei løsning i fjerde kvadrant, derfor setter vi

$$x \approx 360^\circ - 63,4^\circ = 296,6^\circ$$

og

$$x_2 \approx 180^\circ - 63,4^\circ = 116,6^\circ$$

c.I)

Så skal vi derivere litt. Vi begynner med produktregelen

$$\begin{aligned} f(x) &= 3x \cdot \ln x \\ f'(x) &= 3(x)' \cdot \ln x + 3x \cdot (\ln x)' \\ &= 3 \ln x + 3x \cdot \frac{1}{x} \\ &= 3 \ln x + \frac{3 \cdot \cancel{x}}{\cancel{x}} \\ &= 3 \ln x + 3 \\ &= 3 \cdot (\ln x + 1) \end{aligned}$$

c.II)

og nå skal vi derivere med kvotientregelen

$$\begin{aligned}g(x) &= \frac{2e^{4x}}{e^x - 3} \\g'(x) &= \frac{2(e^{4x})' \cdot (e^x - 3) - 2e^{4x} \cdot (e^x - 3)'}{(e^x - 3)^2} \\&= \frac{2 \cdot 4 \cdot e^{4x} \cdot (e^x - 3) - 2e^{4x} \cdot e^x}{(e^x - 3)^2} \\&= \frac{8e^{4x} \cdot (e^x - 3) - 2e^{5x}}{(e^x - 3)^2} \\&= \frac{8e^{5x} - 24e^{4x} - 2e^{5x}}{(e^x - 3)^2} \\&= \frac{6e^{5x} - 24e^{4x}}{(e^x - 3)^2} \\&= \frac{6e^{4x} \cdot (e^x - 4)}{(e^x - 3)^2}\end{aligned}$$

d.I)

Vi løser integralet

$$\begin{aligned}\int_0^3 (2x^2 - 3) dx &= \frac{1}{3} \cdot 2x^3 - 3x \Big|_0^3 \\&= \frac{2}{3}x^3 - 3x \Big|_0^3 \\&= F(3) - F(0) \\&= \frac{2}{3}(3)^3 - 3 \cdot 3 - 0 \\&= 18 - 9 \\&= 9\end{aligned}$$

d.II)

Først må vi finne grensene. Det kan vi gjøre feks ved å tegne grafen på lommeregneren og bruke 'ROOT' for å finne nullpunktene (som er grensene). Da finner vi $x = \{-2, 0, 3\}$. Videre bestemmer vi det uegentlige integralet

$$\int (x^3 - x^2 - 6x) dx = \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 + C$$

Vi kan selvfølgelig se bort fra integrasjonskonstanten, C og regne ut I_1 og I_2

$$\begin{aligned} I_1 &= \left. \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 \right|_{-2}^0 \\ &= 0 - \left(\frac{1}{4}(-2)^4 - \frac{1}{3}(-2)^3 - 3(-2)^2 \right) \\ &= -4 - \frac{8}{3} + 12 \\ &= \frac{16}{3} \end{aligned}$$

og

$$\begin{aligned} I_2 &= \left. \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - 3x^2 \right|_0^3 \\ &= \frac{1}{4}(3)^4 - \frac{1}{3}(3)^3 - 3(3)^2 - 0 \\ &= \frac{81}{4} - 9 - 27 \\ &= -\frac{63}{4} \end{aligned}$$

så

$$I = |I_1| + |I_2| = \frac{16}{3} + \frac{63}{4} = \frac{253}{12} \approx 21,08$$

e.I)

Vi skal lage et passord ut av bokstavene 'T O R E', vi har altså 4 bokstaver, rekkefølgen teller og vi har ikke tilbakelegg.

$$4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$$

e.II)

Vi antar at 'N' i 'A N N E' kan brukes to ganger, da den forekommer to ganger. Likevel må vi fjerne to av ordningene, da de vil bli like.

$$\frac{4!}{2!} = 12$$

f.I.1)

Vi har en klasse med 27 elever, hvorav 17 er gutter og 10 er jenter. Det skal velges en gruppe med 4 tilfeldige valgte elever. Her bruker vi hypergeometrisk sannsynlighetsfordeling, fordi utvalget består av to delmengder.

$$P(3G) = \frac{\binom{17}{3} \cdot \binom{10}{1}}{\binom{27}{4}} = \frac{680 \cdot 10}{17550} = \frac{6800}{17550} \approx 0,387$$

f.I.2)

For at det skal trekkes flere gutter enn jenter, må antallet gutter være 3 eller 4. Vi vet allerede sannsynligheten for at der trekkes 3, så vi trenger kun å regne ut sannsynligheten for 4 gutter, og deretter legge sammen sannsynlighetene.

$$P(4G) = \frac{\binom{17}{4}}{\binom{27}{4}} = \frac{2380}{17550}$$

så

$$P(G > J) = P(3G) + P(4G) = \frac{6800}{17550} + \frac{2380}{17550} = \frac{9180}{17550} = \frac{34}{65} \approx 0,523$$

f.II.1)

Vi kjøper ei pakke med frø, i den er det 30 frø med en spireevne på 90%. Vi vil sjekke sannsynligheten for at minst 90% av disse frøene spirer, altså minst 27 av frøene. I dette tilfellet kan vi bruke binomisk sannsynlighetsfordeling, for enten så spirer frøet, eller så gjør det, det ikke. Før vi begynner, innfører vi hendelsen $X = \text{'Antall frø som spirer'}$.

$$P(X \geq 27) = \sum_{x=27}^{30} \binom{30}{x} \cdot (0,90)^x \cdot (0,10)^{30-x}$$

slenger vi inn dette på lommeregneren, finner vi følgende

$$P(X \geq 27) \approx 0,647$$

f.II.2)

Dersom butikken har pengene-tilbake-garanti dersom færre enn 20 frø spirer, finner vi sannsynligheten

$$P(X \leq 19) = \sum_{x=0}^{19} \binom{30}{x} \cdot (0,90)^x \cdot (0,10)^{30-x}$$

Bruker kalkulatoren og finner at

$$P(X \leq 19) \approx 0,00009$$

Veeldig liten sjans for at det skjer, hehehe.

oppgave 2

a)

Ved $t = 0$, er $A(0,0)$ og $B(60,200)$. Da blir

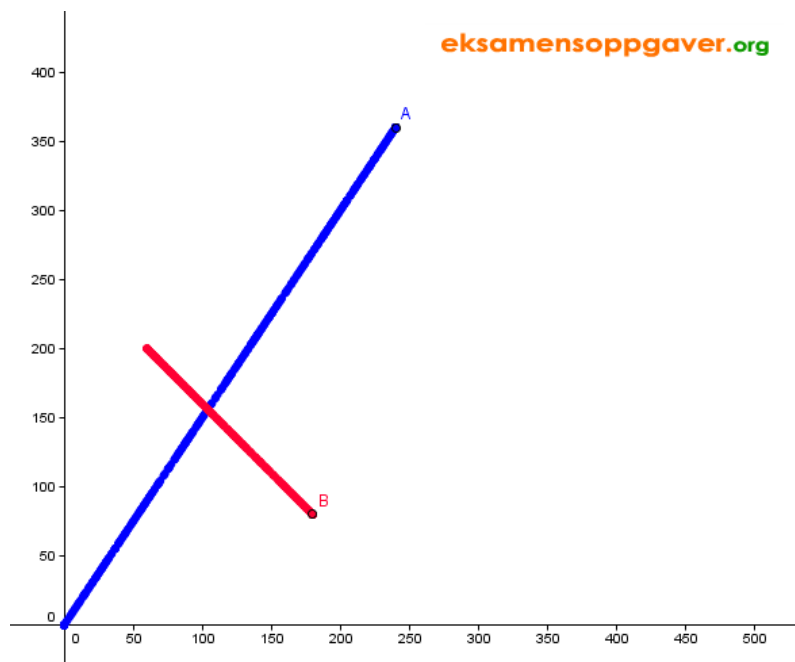
$$\vec{AB} = [60, 200]$$

og

$$|\vec{AB}| = \sqrt{60^2 + 200^2} = \sqrt{43600} \approx 208,8$$

båtene er altså 208,8 meter fra hverandre ved $t = 0$.

b)



c)

Vi ser av illustrasjonen i b at båtenes kurs krysser hverandre én gang, og at de begge er linære. Med dette som utgangspunkt regner vi ut dette skjæringspunktet, men først endrer vi variabelen for B fra t til s , deretter setter vi uttrykkene lik hverandre. Tar for meg x -koordinatene først, og løser med hensyn på t .

$$\begin{aligned}8t &= 4s + 60 \\t &= \frac{4s + 60}{8} \\&= \frac{1}{2}s + \frac{15}{2} \\&= 0,5s + 7,5\end{aligned}\tag{1}$$

Tar så for meg andrekoordinatene og løser med hensyn på s

$$\begin{aligned}12t &= -4s + 200 \\4s &= 200 - 12t \\s &= \frac{200 - 12t}{4} \\&= 50 - 3t\end{aligned}\tag{2}$$

setter inn for s i (1) og løser med hensyn på t

$$\begin{aligned}t &= 0,5 \cdot (50 - 3t) + 7,5 \\t &= 25 - 1,5t + 7,5 \\2,5t &= 32,5 \\t &= 13\end{aligned}$$

Setter så inn for t i (2) og løser med hensyn på s

$$\begin{aligned}s &= 50 - 3 \cdot 13 \\s &= 11\end{aligned}$$

så finner jeg koordinatene ved å sette inn for t i parameterfremstillingen for A . Dette er egentlig ikke nødvendig, da vi allerede har påvist at $t \neq s$ i skjæringspunktet. Grunnen til at jeg gjør dette, er fordi jeg vil validere at vi faktisk har funnet skjæringspunktet.

$$\begin{aligned}x &= 8 \cdot 13 = 104 \\y &= 12 \cdot 13 = 156\end{aligned}$$

og så gjør jeg det samme med parameterfremstillinga for B

$$\begin{aligned}x &= 4 \cdot 11 + 60 = 104 \\y &= -4 \cdot 11 + 200 = 156\end{aligned}$$

Jupp, de stemmer overens. Vi har påvist skjæringspunktet $S(104, 156)$ og at $t \neq s$ i dette punktet, ergo vil båtene ikke kolliderere.

d)

Vi bruker 'avstandsformelen' mellom de to båtene.

$$d = \sqrt{(8t - (4t + 60))^2 + (12t - (-4t + 200))^2}$$

$$d = \sqrt{(4t - 60)^2 + (16t + 200)^2}$$

$$d = \sqrt{16t^2 - 480t + 3600 + 256t^2 + 6400t + 40000}$$

$$d = \sqrt{272t^2 + 5920t + 43600}$$

Avstanden må være større enn 10 meter hele tiden.

$$\sqrt{272t^2 + 5920t + 43600} > 10$$

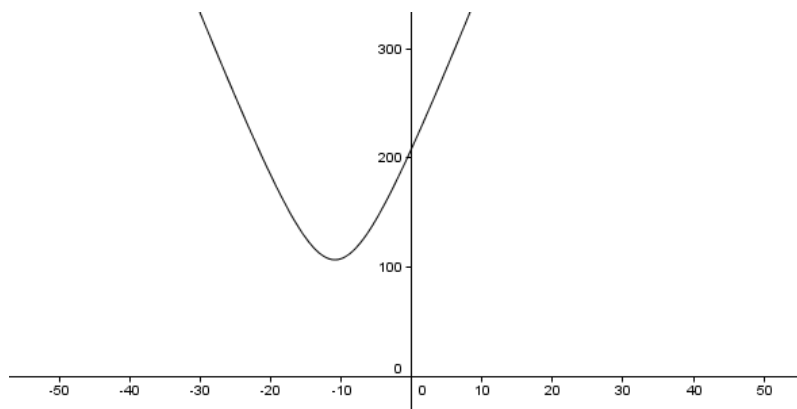
vi kvadrerer

$$272t^2 + 5920t + 43600 > 100$$

flytter over

$$272t^2 + 5920t + 43500 > 0$$

og konkluderer med at denne likningen har ingen reelle løsninger, dermed vil båtene alltid ha en avstand som er større enn 10 meter. Det bekrefter også denne grafiske fremstillingen av avstanden mellom de to båtene.



oppgave 3

a)

Vi skal vise at ligningen for den ene siden i trekanten som går gjennom punktene $(2, 0)$ og $(0, 6)$ er gitt ved

$$y = -3x + 6$$

La oss begynne med å finne stigningstallet, a .

$$a = \frac{\delta y}{\delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{0 - 6}{2 - 0} = \frac{-6}{2} = -3$$

Da har vi altså funnet stigningstallet. Vi vet også at linja går gjennom de to punktene, og velger punktet $(0, 6)$ som utgangspunkt i ettpunktsformelen.

$$y - y_1 = a(x - x_1)$$

setter inn verdiene

$$y - 6 = -3 \cdot (x - 0)$$

$$y = -3x + 6$$

der har vi vist det :)

b)

Vi vet at arealet av et rektangel er

$$A = l \cdot b$$

i dette tilfellet har vi et rektangel innskrevet i en likebeint trekant. Lengden, l , vil altså være variabel med x og speiles om andreaksen slik at vi må multiplisere med 2. Videre er bredden, b , lik uttrykket vi fant i deloppgave a, siden rektangelet følger grafen. Ergo får vi

$$A(x) = 2 \cdot xy = 2x \cdot (-3x + 6) = -6x^2 + 12x$$

c)

Vi deriverer $A(x)$

$$A'(x) = -6 \cdot (x^2)' + 12 \cdot (x)'$$

$$A'(x) = -12x + 12$$

Setter den deriverte lik null

$$-12x + 12 = 0$$

løser med hensyn på x

$$-12x = -12$$

$$x = 1$$

hvilket gir arealet

$$A(1) = -6(1)^2 + 12(1) = 6$$

Da er lengdene til sidene henholdsvis

$$2 \cdot 1 = 2$$

og

$$-3 \cdot 1 + 6 = 3$$

d)

Volumet av en sylinder er gitt ved

$$V_s = \pi r^2 h$$

dog varierer både radius og høyde av sylinderen med høyden av kjegla, og derfor må vi ta hensyn til målene av kjegla, henholdsvis $h = 6$ og $r = 2$. Fortsatt beskriver

$$y = -3x + 6$$

høyden, men denne gangen av sylinderen. Videre vil radius beskrives av x , altså får vi

$$V(x) = \pi \cdot x^2 \cdot (-3x + 6)$$

$$V(x) = \pi \cdot (6x^2 - 3x^3)$$

e)

Vi deriverer V

$$\begin{aligned}V(x) &= 6\pi x^2 - 3\pi x^3 \\V'(x) &= 12\pi x - 9\pi x^2\end{aligned}$$

Vi setter den deriverte lik 0 og løser

$$12\pi x - 9\pi x^2 = 0$$

$$3\pi x \cdot (4 - 3x) = 0$$

Altså får vi én løsning når

$$x = 0$$

og finner en løsning til når vi løser likninga

$$4 - 3x = 0$$

$$x = \frac{4}{3}$$

radius er altså lik $4/3$ når volumet er størst. Da er høyden lik

$$y = -3 \cdot \frac{4}{3} + 6 = 2$$

oppgave 4

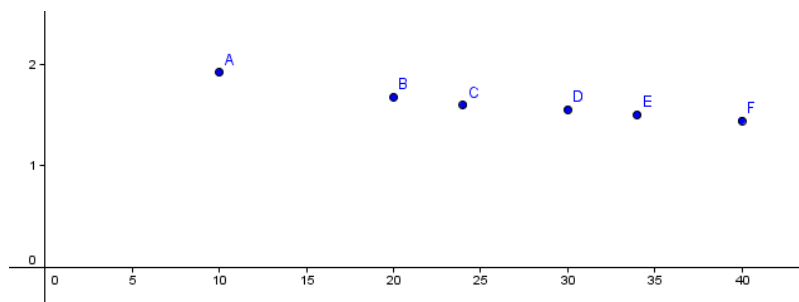
a)

Skriver av tabellen og runder av de logaritmiske verdiene til tre desimaler.

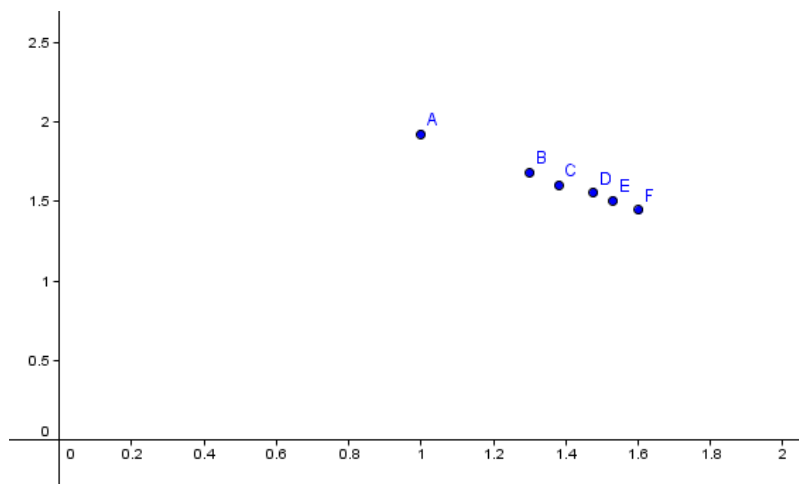
Pris x	10	20	24	30	34	40
Solgte enheter q	84	48	40	36	32	28
$\lg x$	1,000	1,301	1,380	1,477	1,531	1,602
$\lg q$	1,924	1,681	1,602	1,556	1,505	1,447

b)

Her er koordinatsystem nr 1, med x langs førsteaksen og $\lg q$ langs andreaksen.



Og her er koordinatsystem nr 2, med $\lg x$ langs førsteaksen og $\lg q$ langs andreaksen.



c)

Når vi sammenlikner koordinatsystemene i b, så ser vi at punktene i det siste ligger mer på linje enn de i de første. Dette betyr at en potensfunksjon er en god modell for å beskrive sammenhengen mellom pris og antall solgte enheter.

Ved å bruke regresjon på lommeregneren, finner vi at de opprinnelige punktene passer godt med en potensfunksjon med følgende parametere (rundet av til tre desimaler).

$$q(x) = 506,547 \cdot x^{-0,785}$$

d)

Jeg runder av til nærmeste heltall.

$$q(15) = 506,547 \cdot 15^{-0,785} \approx 60,402 \text{ enheter}$$

Da blir solte enheter ca 60.

e)

Jeg runder av til nærmeste heltall også her.

$$506,547 \cdot x^{-0,785} = 45$$

$$x^{-0,785} = \frac{45}{506,547}$$

$$x = \sqrt[-0,785]{\frac{45}{506,547}}$$

$$x \approx 21,846$$

Da blir prisen ca 22.

f)

Vi får følgende likning, med p som ukjent prosent.

$$\frac{506,547 \cdot x^{-0,785}}{100} = \frac{506,547 \cdot (1,10 \cdot x)^{-0,785}}{p}$$

kryssmultipliserer

$$p \cdot (506,547 \cdot x^{-0,785}) = (506,547 \cdot (1,10 \cdot x)^{-0,785}) \cdot 100$$

isolerer p på venstre side

$$p = \frac{(506,547 \cdot (1,10 \cdot x)^{-0,785}) \cdot 100}{506,547 \cdot x^{-0,785}}$$

faktorerer litt

$$p = \frac{(\cancel{506,547} \cdot 1,10^{-0,785} \cdot \cancel{x^{-0,785}}) \cdot 100}{\cancel{506,547} \cdot \cancel{x^{-0,785}}}$$

ordner

$$p = \frac{100}{1,10^{0,785}}$$

og regner ut

$$p \approx 92,79\%$$

den prosentvise nedgangen i antall solgte enheter blir

$$100\% - 92,79\% = 7,21\%$$

oppgave 5

a)

Koordinatene på tomten $ABCD$ er

- $A(5, 0)$
- $B(35, 0)$
- $C(35, 30)$
- $D(15, 35)$

Vi bestemmer vektoren \vec{AC} i tillegg til lengden av den.

$$\vec{AC} = [35 - 5, 30 - 0] = [30, 30]$$

$$|\vec{AC}| = \sqrt{30^2 + 30^2} = \sqrt{1800} \approx 42,43 \text{ m}$$

b)

Først bestemmer vi $|\vec{AD}|$ og $|\vec{DC}|$

$$|\vec{AD}| = \sqrt{(15 - 5)^2 + (35 - 0)^2} = \sqrt{1325}$$

$$|\vec{DC}| = \sqrt{(35 - 15)^2 + (30 - 35)^2} = \sqrt{400 + 25} = \sqrt{425}$$

Vi ordner cosinussetningen for å finne $\angle CDA$

$$|\vec{AC}|^2 = |\vec{AD}|^2 + |\vec{DC}|^2 - 2 \cdot |\vec{AD}| \cdot |\vec{DC}| \cdot \cos(\angle D)$$

løser denne med hensyn på $\angle D$

$$\angle D = \arccos \left(\frac{|\vec{AC}|^2 - |\vec{AD}|^2 - |\vec{DC}|^2}{-2 \cdot |\vec{AD}| \cdot |\vec{DC}|} \right)$$

setter inn verdiene og regner ut.

$$\angle D = \arccos \left(\frac{(\sqrt{1800})^2 - (\sqrt{1325})^2 - (\sqrt{425})^2}{-2 \cdot \sqrt{1325} \cdot \sqrt{425}} \right)$$

$$\angle D = \arccos \left(\frac{1800 - 1325 - 425}{-2\sqrt{563125}} \right)$$

$$\angle D = \arccos \left(\frac{50}{-2\sqrt{563125}} \right)$$

$$\angle D \approx 91,9^\circ$$

c)

Vi skal finne arealet av hele tomten, men finner først arealet av $\triangle ACD$

$$A_1 = \frac{1}{2} \cdot AD \cdot DC \cdot \sin \angle D$$

$$A_1 = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{1325} \cdot \sqrt{425} \cdot \sin(91,9^\circ) \approx 375,00 \text{ m}^2$$

og så finner vi arealet av $\triangle ABC$. Merk at dette er en rettvinklet trekant, dermed er $\sin \angle B = 1$.

$$A_2 = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot BC$$

$$A_2 = \frac{1}{2} \cdot 30 \cdot 30 = 450,0 \text{ m}^2$$

$$A = A_1 + A_2 = 375,0 + 450,0 = 825,0 \text{ m}^2$$

d)

Tomtene skal da ha et areal på hver

$$\frac{A}{2} = \frac{825,0}{2} = 412,5 \text{ m}^2$$

Vi bruker $\triangle FBC$ for å finne koordinatene til F . Vi har dermed en rettvinklet trekant som vi vet skal ha et areal på $412,5 \text{ m}^2$, og siden delelinja skjærer AB i F , så vet vi også at y -koordinaten er 0.

$$A_3 = \frac{1}{2} \cdot FB \cdot BC = 412,5$$

$$\frac{1}{2} \cdot \sqrt{(35-x)^2} \cdot 30 = 412,5$$

vi trekker sammen og forenkler litt

$$\frac{\sqrt{(35-x)^2} \cdot 30}{2} = 412,5$$

$$(35-x) \cdot 30 = 412,5 \cdot 2$$

$$1050 - 30x = 825$$

$$-30x = 825 - 1050$$

$$x = \frac{-225}{-30}$$

$$x = 7,5$$

altså blir koordinatene til $F(7,5, 0)$

Dersom du er interessert, finner du flere [løsningsforslag](#) på eksamensoppgaver.org

SLUTT