E
K
S
A
M
E
N

LÆRINGSSENTERET

Matematikk 3MX

Privatistar / Privatister

AA6526
5. mai 2004

Vidaregåande kurs II / Videregående kurs II
Studieretning for allmenne, økonomiske og administrative fag

Oppgåva ligg føre i begge målformer, først nynorsk, deretter bokmål. /
Oppgaven foreligger på begge målformer, først nynorsk, deretter bokmål.

Bokmål

OPPGAVE 1

a) Deriver funksjonene

1) $f(x) = \cos x + 5\sin 2x$

2) $g(x) = \dfrac{\sin x}{x}$

b) Finn integralene ved regning

1) $\int \left(x - \dfrac{2}{x} \right) \mathrm{d}x$

2) $\int_1^{e^2} \dfrac{1}{x} \cdot \ln x \;\mathrm{d}x$

c) Løs likningen ved regning og skriv svarene som eksakte verdier

$$2\cos 2x - \sqrt{3} = 0 \qquad\qquad x \in [0, 2\pi\rangle$$

d) Turid vil spare til å kjøpe bil. For å ha nok penger til å kjøpe bilen kontant vil hun sette 18 000 kroner i banken 1. januar hvert år i seks år. Rentefoten er 4,5 % per år.

1) Undersøk om hun har nok penger til å kjøpe en bil til 150 000 kroner like etter at hun har satt inn det sjette beløpet.

2) Hva er det minste beløpet hun kunne ha spart per år for å ha nok penger til å kjøpe denne bilen?

OPPGAVE 2

Strømstyrken I i en krets med vekselspenning kan beskrives som en harmonisk svingning ved uttrykket

$$I(t) = 4{,}2 + 2{,}5\sin(25t) \qquad t \geq 0$$

der I måles i ampere og t i sekunder.

a) Tegn en skisse av grafen til $I(t)$ når $t \in [0, 1]$.

b) Finn likevektslinja, amplituden og perioden for denne svingningen.

c) Finn ved regning minste og største strømstyrke, og de tilhørende t-verdiene.

d) Når er strømstyrken 6,0 ampere første gang?

OPPGAVE 3

En husholdning består av én eller flere personer som bor sammen. La X være antall personer i en tilfeldig valgt norsk husholdning. Sannsynlighetsfordelingen til X er gitt ved tabellen

k	1	2	3	4	5	6	7
$P(X=k)$	0,405	0,285	0,128	0,118	0,052	0,009	0,003

(Tabellen er basert på opplysninger fra Statistisk sentralbyrå. Husholdninger med mer enn 7 personer er slått sammen med husholdninger som har 7 personer.)

a) Hva er sannsynligheten for at en husholdning har høyst to medlemmer? Hva er sannsynligheten for at den har minst fire medlemmer?

b) Finn forventningsverdien til X.

c) Finn variansen og standardavviket for X.

Mosjonsforeningen *Komiform* opererer over hele landet og har husholdninger som medlemmer. Vi antar at de 1 000 husholdningene som er med i mosjonsforeningen, er et tilfeldig utvalg av alle husholdninger i Norge. Kontingenten i *Komiform* er 500 kroner for den første personen i husholdningen og 200 kroner i tillegg for hver person utover den første.

d) La Y være kontingenten for en tilfeldig valgt husholdning.

   1) Forklar at $Y = 300 + 200X$

   2) Finn forventningsverdien og standardavviket for Y.

e) Hva er sannsynligheten for at den samlede kontingentinnbetalingen til *Komiform* blir minst 725 000 kroner, dvs. i gjennomsnitt minst 725 kroner for hver av de 1000 husholdningene?

OPPGAVE 4

Du skal besvare <u>enten</u> alternativ I <u>eller</u> alternativ II.
De to alternativene er likeverdige ved vurderingen.

(Dersom besvarelsen inneholder deler av begge,
vil bare det du har skrevet på alternativ I, bli vurdert.)

Alternativ I

Et plan α skjærer koordinataksene i punktene $A(4\ ,0\ ,0)$, $B(0\ ,5\ ,0)$ og $C(0\ ,0\ ,6)$.

a) Finn $\overrightarrow{AB}$ og $\overrightarrow{AC}$.

b) Vis at vektoren $\vec{n} = [15\ ,12\ ,10]$ er en normalvektor til planet.

c) Finn likningen for planet.

d) Finn avstanden fra origo til planet α.

Alternativ II

En partikkel følger en bane gitt ved posisjonsvektoren $\vec{r}$, der

$$\vec{r}(t) = [3\cos t,\ 2\sin t] \qquad t \in [0, 2\pi\rangle$$

Tiden t er målt i sekunder og avstander er målt i meter.

a) Skisser grafen til posisjonsvektoren $\vec{r}$.

b) Finn farten til partikkelen etter 2 sekunder.

c) Finn et uttrykk $\vec{a}(t)$ for akselerasjonsvektoren. Kommenter akselerasjonsvektorens retning i forhold til $\vec{r}$.

d) Hvor langt har partikkelen beveget seg når den har gjennomført ett omløp?

Bokmål

OPPGAVE 5

Marianne skal delta i et spørreprogram på TV, der hun kan få opptil 20 spørsmål. Hun får spørsmålene ett og ett. Svarer hun riktig på et spørsmål, går hun videre til det neste. Svarer hun galt, blir hun slått ut av programmet. Greier hun å svare riktig på alle 20 spørsmålene, vinner hun hovedpremien i konkurransen.

Vi tenker oss at Marianne har samme sannsynlighet p for å svare riktig på hvert spørsmål.

a) Forklar at sannsynligheten for at Marianne vinner hovedpremien er p^{20}. Hvor stor er denne sannsynligheten hvis $p = 0,80$?

b) Forklar at sannsynligheten for at Marianne skal svare riktig på nøyaktig k spørsmål $(k < 20)$, er $p^k(1-p)$ når p er mindre enn 1.

c) Den stokastiske variabelen X angir antall spørsmål Marianne svarer riktig på. Forklar hvorfor

$$E(X) = p(1-p) + 2p^2(1-p) + 3p^3(1-p) + \cdots + 19p^{19}(1-p) + 20p^{20}$$

d) Vis at

$$p(1-p) + 2p^2(1-p) + 3p^3(1-p) + \cdots + 19p^{19}(1-p) + 20p^{20} = p + p^2 + p^3 + p^4 + \cdots + p^{20}$$

e) Bruk c) og d) til å vise at

$$E(X) = \frac{p^{21} - p}{p - 1} \qquad \text{når } p \text{ er mindre enn 1.}$$

f) For å vinne en premie må Marianne svare riktig på minst 15 spørsmål. Hvor stor må p være for at $E(X)$ skal være minst 15?