

Løsningsforslag
AA6526 Matematikk 3MX - 5. mai 2004

eksamensoppgaver.org

Om løsningsforslaget

Løsningsforslaget for matematikk eksamen i 3MX er gratis, og det er lastet ned på eksamensoppgaver.org. Løsningen er myntet på elever og privatister som vil forbrede seg til eksamen i matematikk. Lærere må gjerne bruke løsningsforslaget i undervisningsøyemed, men virksomheter har ingen rett til å anvende dokumentet.

Løsningsforslagene skal utelukkende distribueres fra nettstedet eksamensoppgaver.org, da det er viktig å kunne føye til og rette eventuelle feil i ettertid. På den måten vil alle som ønsker det, til enhver tid finne det siste oppdaterte verket. eksamensoppgaver.org ønsker videre at flest mulig skal få vite om eksamensløsningene, slik at det finnes et eget nettsted hvor man kan tilegne seg dette gratis.

Dersom du sitter på ressurser du har mulighet til å dele med deg, eller ønsker å bidra på annen måte, håper eksamensoppgaver.org på å høre fra deg.

Innholdsfortegnelse

oppgave 1	4
a.1)	4
a.1)	4
b.1)	4
b.2)	5
c)	6
d.1)	7
d.2)	7
oppgave 2	8
a)	8
b)	8
c)	9
d)	10
oppgave 3	11
a)	11
b)	11
c)	11
d.1)	12
d.2)	12
e)	12
oppgave 4 - alternativ I	13
a)	13
b)	13
c)	13
d)	13
oppgave 4 - alternativ II	14
a)	14
b)	14
c)	15
d)	15
oppgave 5	16
a)	16
b)	16
c)	16
d)	17
e)	17
f)	18

oppgave 1**a.1)**

Vi deriverer

$$\begin{aligned}f(x) &= \cos x + 5 \sin(2x) \\f'(x) &= (\cos x)' + 5 \cdot (\sin(2x))' \cdot (2x)' \\&= -\sin x + 5 \cdot 2 \cdot \cos(2x) \\&= 10 \cos(2x) - \sin x\end{aligned}$$

a.1)

Og vi skal derivere også denne

$$\begin{aligned}g(x) &= \frac{\sin x}{x} \\g'(x) &= \frac{(\sin x)' \cdot x - \sin x \cdot x'}{x^2} \\&= \frac{x \cdot \cos x - \sin x}{x^2}\end{aligned}$$

b.1)

Vi skal bestemme integralet ved regning

$$\int \left(x - \frac{2}{x} \right) dx = \frac{1}{2}x^2 - 2 \cdot \ln|x| + C$$

b.2)

Vi skal regne ut integralet

$$\int_1^{e^2} \frac{1}{x} \cdot \ln x \, dx$$

Her benytter vi delvis integrasjon og setter

$$u' = \frac{1}{x} \quad u = \ln x$$

og

$$v' = \frac{1}{x} \quad v = \ln x$$

da får vi

$$\int_1^{e^2} \frac{1}{x} \cdot \ln x \, dx = \ln^2 x - \int_1^{e^2} \frac{1}{x} \cdot \ln x \, dx$$

deretter flytter vi over integralet på høyre side til venstre side

$$2 \cdot \int_1^{e^2} \frac{1}{x} \cdot \ln x \, dx = \ln^2 x$$

deler på 2 på begge sider og evaluerer grensene

$$\begin{aligned} \int_1^{e^2} \left(\frac{1}{x} \cdot \ln x \right) dx &= \frac{1}{2} \cdot \ln^2 x \Big|_1^{e^2} \\ &= F(e^2) - F(1) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \ln^2(e^2) - \frac{1}{2} \cdot \ln^2(1) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \ln(e^2) \cdot \ln(e^2) - 0 \\ &= \frac{1}{2} \cdot 2 \ln e \cdot 2 \ln e \\ &= \frac{4}{2} \\ &= 2 \end{aligned}$$

c)

Vi skal løse likningen

$$2 \cos(2x) - \sqrt{3} = 0 \quad x \in [0, 2\pi)$$

og skrive svarene som eksakte verdier.

$$2 \cos(2x) = \sqrt{3}$$

$$\cos(2x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$2x = \arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$2x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \quad \vee \quad 2x = 2\pi - \frac{\pi}{6} + 2k\pi$$

$$x = \frac{\frac{\pi}{6} + 2k\pi}{2} \quad \vee \quad x = \frac{\frac{11\pi}{6} + 2k\pi}{2}$$

$$x = \frac{\pi}{12} + k\pi \quad \vee \quad x = \frac{11\pi}{12} + k\pi$$

så da har vi løsninger for

$$k = \{0, 1\} \quad \implies \quad x = \left\{ \frac{\pi}{12}, \frac{11\pi}{12}, \frac{13\pi}{12}, \frac{23\pi}{12} \right\}$$

d.1)

Turid setter 18000 kroner i banken 1. januar hvert år i 6 år. Renten er 4,5% per år. Vi vil undersøke om hun har råd til å kjøpe en bil til 150 000 kroner like etter at hun har satt inn det sjette beløpet.

Vi har altså ei geometrisk rekke med

$$a_1 = 18000$$

$$k = 1,045$$

Vi sjekker hvor mange år hun må spare for å ha 150 000 kroner.

$$\frac{18000 \cdot (1,045^n - 1)}{0,045} = 150000$$

$$1,045^n - 1 = \frac{150000 \cdot 0,045}{18000}$$

$$1,045^n = \frac{6750}{18000} + 1$$

$$1,045^n = \frac{11}{8}$$

$$n = \frac{\ln(11) - \ln(8)}{\ln(1,045)}$$

$$n \approx 7,23$$

nei, hun har ikke råd til å kjøpe bilen like etter at hun har satt inn det 6 beløpet.

d.2)

Da måtte hun ha spart

$$\frac{a_1 \cdot (1,045^6 - 1)}{1,045 - 1} = 150000$$

$$a_1 \cdot (1,045^6 - 1) = 6750$$

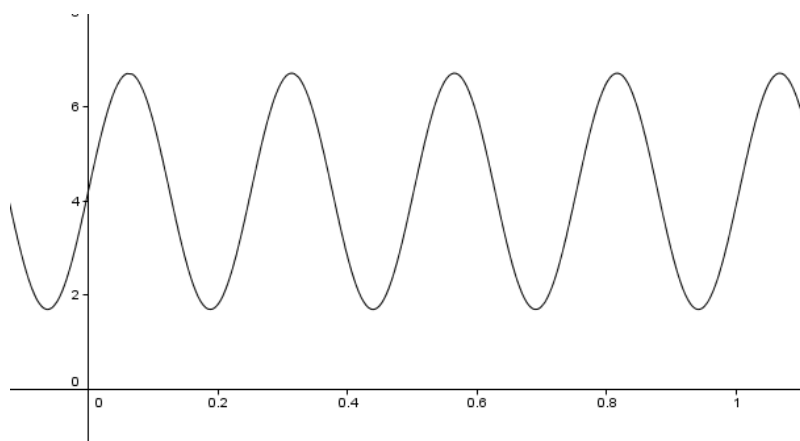
$$a_1 = \frac{6750}{1,045^6 - 1}$$

$$a_1 \approx 22332$$

da måtte hun spart 22 332 kroner hvert år.

oppgave 2

a)



b)

Vi ser av funksjonsuttrykket

$$I(t) = 4,2 + 2,5 \cdot \sin(25t)$$

at likevektslinja

$$y = 4,2$$

amplituden

$$A = 2,5$$

og perioden er

$$P = \frac{2\pi}{25} \approx 0,251$$

c)

Vi vet at $I(t)$ vil ha sin minste verdi når

$$\sin(25t) = -1$$

og største verdi når

$$\sin(25t) = 1$$

med dette på minne, kan vi regne ut minimal- og maksimalverdiene slik

$$I(t) = 4,2 + 2,5 \cdot (-1) = 1,7$$

$$I(t) = 4,2 + 2,5 \cdot (1) = 6,7$$

Å finne t -verdiene for disse ekstremalverdiene, gjøres enkelt ved å sette

$$\sin(25t) = -1$$

$$25t = \arcsin(-1)$$

$$25t = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \quad k \in \mathbb{Z}$$

$$t = \frac{\frac{3\pi}{2} + 2k\pi}{25}$$

$$t = \frac{3\pi}{50} + \frac{2\pi}{25}k$$

og ettersom definisjonsmengden til funksjonen er $t \geq 0$ vil vi finne løsninger for

$$t \approx 0,188 + 0,251k$$

Vi gjør det samme med maksimalverdiene.

$$\sin(25t) = 1$$

$$25t = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$$

$$t = \frac{\pi}{50} + \frac{2\pi}{25}k$$

$$t \approx 0,063 + 0,251k$$

Dersom de er ute etter eksakte verdier for $t \in [0, 1]$, så har vi

$$I(t) = 1,7 \quad k = \{0, 1, 2, 3\} \quad \implies \quad t = \left\{ \frac{3\pi}{50}, \frac{7\pi}{50}, \frac{11\pi}{50}, \frac{15\pi}{50} \right\}$$

og

$$I(t) = 6,7 \quad k = \{0, 1, 2, 3\} \quad \implies \quad t = \left\{ \frac{\pi}{50}, \frac{5\pi}{50}, \frac{9\pi}{50}, \frac{13\pi}{50} \right\}$$

d)

Vi setter

$$I(t) = 6,0$$

og løser likningen med hensyn på t

$$4,2 + 2,5 \cdot \sin(25t) = 6,0$$

$$\sin(25t) = \frac{6,0 - 4,2}{2,5}$$

$$25t = \arcsin(0,72)$$

$$t = \frac{\arcsin(0,72)}{25}$$

$$t \approx 0,032$$

etter 0,032 sekunder.

oppgave 3

a)

Vi vil finne sannsynligheten for at en husholdning har høyst 2 medlemmer.

$$P(X \leq 2) = P(X = 1) + P(X = 2) = 0,405 + 0,285 = 0,690$$

Sannsynligheten for at en husholdning har minst fire medlemmer er

$$\begin{aligned} P(X \geq 4) &= P(X = 4) + P(X = 5) + P(X = 6) + P(X = 7) \\ &= 0,118 + 0,052 + 0,009 + 0,003 \\ &= 0,182 \end{aligned}$$

b)

Forventningsverdien til X er

$$\begin{aligned} \mu = E(X) &= 1 \cdot 0,405 + 2 \cdot 0,285 + 3 \cdot 0,128 + 4 \cdot 0,118 + 5 \cdot 0,052 + 6 \cdot 0,009 + 7 \cdot 0,003 \\ &= 2,166 \end{aligned}$$

c)

Variansen til X er

$$Var(X) = (1 - 2,166)^2 \cdot 0,405 + \dots + (7 - 2,166)^2 \cdot 0,003 = 1,664444 \approx 1,664$$

og standardavviket

$$\sigma = SD(X) = \sqrt{Var(X)} = \sqrt{1,664444} \approx 1,290$$

Disse verdiene kan vi også finne på kalkulatoren. I mitt tilfelle, fordi jeg bruker Casio fx-9750G Plus, så må jeg plote inn verdiene i to tabeller under 'STAT' menyen. Deretter velger jeg 'CALC' og 'SET'. '1 Var XList' til listen med 1, 2, 3 osv, og '1Var Freq' til listen med sannsynlighetene (den relative frekvensen).

Deretter er det bare å trykke '1VAR', og popp, så spretter de herlige verdiene opp foran øynene på deg.

d.1)

Vi er gitt at den stokastiske variabelen $X =$ ‘Antall personer i en husholdning’, og datasettet tar ikke hensyn til husholdninger med mindre enn én person. Derfor kan vi si at alle husholdninger har minst én person, altså

$$X > 0$$

Da ser vi at den stokastiske variabelen $Y =$ ‘Kontingenten for en tilfeldig valgt husholdning’ vil være

$$Y = 300 + 200X$$

siden det koster 500 for den første personen, pluss 200 for hvert påfølgende medlem (i husholdningen).

$$Y = 300 + 200 = 500$$

$$Y = 300 + 200 \cdot 2 = 700$$

og så videre.

d.2)

Her har vi en linær stokastisk variabel, og vi kan sette

$$\mu_Y = E(Y) = 300 + 200 \cdot E(X) = 300 + 200 \cdot 2,166 = 733,2$$

og standardavvik

$$\sigma_Y = \sqrt{Var(Y)} = \sqrt{200^2 \cdot Var(X)} = 200\sqrt{1,664444} \approx 258,03$$

e)

Denne er jeg veldig usikker på, så dersom du vet hvordan, så hadde jeg satt pris på om du la inn svaret (med forklaring) i kommentarfeltet i eksamensprospektet på nettsidene.

oppgave 4 - alternativ I**a)**

Først

$$\overrightarrow{AB} = [0 - 4, 5 - 0, 0 - 0] = [-4, 5, 0]$$

og så

$$\overrightarrow{AC} = [0 - 4, 0 - 0, 6 - 0] = [-4, 0, 6]$$

b)

Vi skal vise at

$$\vec{n} = [15, 12, 10]$$

er en normalvektor til planet, α .

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{AB} = [15, 12, 10] \cdot [-4, 5, 0] = -60 + 60 + 0 = 0$$

og

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{AC} = [15, 12, 10] \cdot [-4, 0, 6] = -60 + 0 + 60 = 0$$

dermed konkluderer vi med at

$$\vec{n} \perp \overrightarrow{AB} \quad \text{og} \quad \vec{n} \perp \overrightarrow{AC}$$

så

$$\vec{n} \perp \alpha$$

og følgelig er \vec{n} en normalvektor til planet α .**c)**Vi tar utgangspunkt i punktet $A(4, 0, 0)$ og normalvektoren \vec{n} og setter

$$15(x - 4) + 12(y - 0) + 10(z - 0) = 0$$

$$15x + 12y + 10z - 60 = 0$$

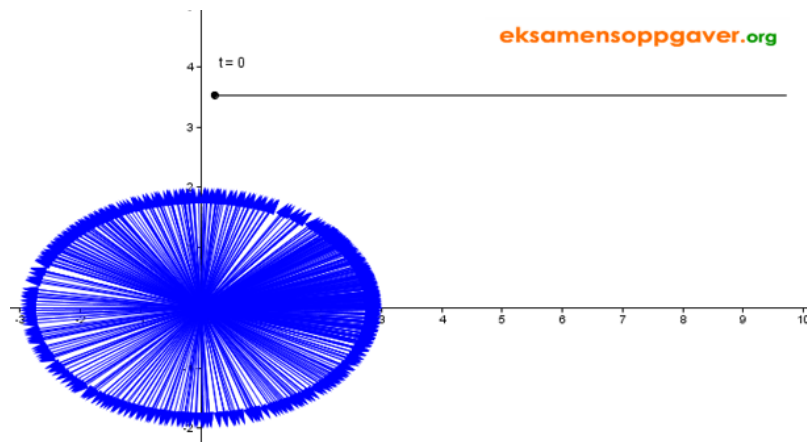
er likningen for planet α .**d)**Origo, $O(0, 0, 0)$ er

$$D = \frac{|15 \cdot 0 + 12 \cdot 0 + 10 \cdot 0 - 60|}{\sqrt{15^2 + 12^2 + 10^2} \cdot \sqrt{0}} = \frac{60}{\sqrt{469}} \approx 2,771$$

ifra planet.

oppgave 4 - alternativ II

a)



b)

Vi deriverer posisjonsvektoren, deretter finner vi farten ved 2 sekunder ved å sette $t = 2$.

$$\begin{aligned}\vec{r}'(t) &= [3 \cdot (\cos t)', 2 \cdot (\sin t)'] \\ &= [-3 \sin t, 2 \cos t] \\ |\vec{v}(2)| &= \sqrt{(-3 \sin(2))^2 + (2 \cos(2))^2} \\ &= \sqrt{9 \sin^2(2) + 4 \cos^2(2)} \\ &\approx 2,85 \text{ m/s}\end{aligned}$$

c)

$$\vec{a}(t) = \vec{v}'(t) = \vec{r}''(t)$$

så vi deriverer $\vec{v}(t)$

$$\begin{aligned}\vec{a}(t) &= [-3 \cdot (\sin t)', 2 \cdot (\cos t)'] \\ &= [-3 \cos t, -2 \sin t]\end{aligned}$$

Vi ser at

$$\vec{a}(t) = -\vec{r}(t)$$

d)

Vi er gitt at

$$t \in [0, 2\pi)$$

dermed kan vi sette (og regne ut følgende på kalkulatoren)

$$\begin{aligned}s &= \int_0^{2\pi} |\vec{r}'(t)| dt \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{(-3 \sin t)^2 + (2 \cos t)^2} dt \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{9 \sin^2 t + 4 \cos^2 t} dt \\ &\approx 15,865 m\end{aligned}$$

oppgave 5

a)

Sannsynligheten for at Marianne vinner hovedpremien er

$$p^{20}$$

fordi hun **må** svare riktig på alle 20 spørsmålene, i tillegg til at hun har like stor sannsynlighet for å svare rett på hvert enkelt. Vi bruker altså produktsetningen, der

$$P(\text{hovedpremie}) = p_1 \cdot p_2 \cdot \dots \cdot p_{20}$$

og

$$p_1 = p_2 = \dots = p_{20} = 0,80$$

Sannsynligheten for at Marianne skal få hovedpremien blir derfor

$$P(\text{hovedpremie}) = (0,80)^{20} \approx 0,0115$$

b)

Enten så svarer Marianne riktig, eller så gjør hun det ikke. I uttrykket

$$p^k \cdot (1-p) \quad k < 20 \quad p < 1$$

vil altså

$$p^k$$

angi sannsynligheten for antall riktige, mens faktoren

$$(1-p)$$

vil være den komplementære sannsynligheten (sannsynligheten for at hun svarer feil) på det siste spørsmålet. Grunnen til at

$$(1-p)$$

ikke har noen eksponent, er fordi Marianne kun får fortsette dersom hun har svart riktig, altså er det bare rom for én feil.

c)

Forventningsverdien til den stokastiske variabelen $X = \text{'Antall spørsmål Marianne svarer riktig på'}$ blir

$$E(X) = p(1-p) + 2p^2(1-p) + \dots + 20p^{20}$$

fordi dette er binomisk sannsynlighet (enten eller), og hvis hun svarer feil, så stopper stringen av spørsmål opp. Dette kan vi fremstille feks i en tabell, slik

k	0	1	2	...	20
$P(X = k)$	$(1-p)$	$p(1-p)$	$2p^2(1-p)$...	p^{20}

d)

Vi begynner med

$$p(1-p) + 2p^2(1-p) + 3p^3(1-p) + \dots + 19p^{19}(1-p) + 20p^{20}$$

vi løser opp parentesene, og da får vi

$$p - p^2 + 2p^2 - 2p^3 + 3p^3 - 3p^4 + \dots + 19p^{19} - 19p^{20}$$

For å gjøre det klarere, omgrupperer vi leddene ovenfor, slik

$$p + 2p^2 - p^2 + 3p^3 - 2p^3 + \dots + 20p^{19} - 19p^{19} + 20p^{20}$$

legger vi disse sammen (eller trekker fra, hehe) så får vi

$$p + p^2 + p^3 + \dots + p^{19} + p^{20}$$

e)

Vi vet jo at

$$E(X) = p(1-p) + 2p^2(1-p) + \dots + p^{20}$$

og fra d fant vi at

$$p(1-p) + 2p^2(1-p) + \dots + p^{20}$$

var det samme som

$$p + p^2 + \dots + p^{20}$$

dermed har vi ei rekke med første ledd $a_1 = p$, slik at summen av rekka vil bli

$$S_n = \frac{p(p^n - 1)}{p - 1}$$

og siden vi har 20 ledd i rekka får vi

$$S_{20} = E(X) = \frac{p \cdot (p^{20} - 1)}{p - 1} = \frac{p^{21} - p}{p - 1}$$

f)

I deloppgave e viste vi at

$$E(X) = \frac{p^{21} - p}{p - 1} \quad p < 1$$

og vi vil nå løse ulikheten

$$E(X) \geq 15$$

$$\frac{p^{21} - p}{p - 1} \geq 15$$

skriver vi inn dette på kalkulatoren, så finner vi at ulikheten stemmer for

$$p \in [0,9717, 1]$$

OBS: tallet ovenfor er rundet av til fire desimaler.

Dersom du er interessert, finner du flere [løsningsforslag](https://eksamensoppgaver.org) på eksamensoppgaver.org

SLUTT