

Løsningsforslag for eksamen i
AA6516 Matematikk 2MX - 4. desember 2008

eksamensoppgaver.org

Om løsningsforslaget

Løsningsforslaget for matematikk eksamen i 2MX er gratis, og det er lastet ned på eksamensoppgaver.org. Løsningen er myntet på elever og privatister som vil forbrede seg til eksamen i matematikk. Lærere må gjerne bruke løsningsforslaget i undervisningsøyemed, men virksomheter har ingen rett til å anvende dokumentet.

Løsningsforslagene skal utelukkende distribueres fra nettstedet eksamensoppgaver.org, da det er viktig å kunne føye til og rette eventuelle feil i ettertid. På den måten vil alle som ønsker det, til enhver tid finne det siste oppdaterte verket. eksamensoppgaver.org ønsker videre at flest mulig skal få vite om eksamensløsningene, slik at det finnes et eget nettsted hvor man kan tilegne seg dette gratis.

Dersom du sitter på ressurser du har mulighet til å dele med deg, eller ønsker å bidra på annen måte, håper eksamensoppgaver.org på å høre fra deg.

Innholdsfortegnelse

oppgave 1	4
a.I)	4
a.II)	5
b.I)	5
b.II)	6
c.I)	6
c.II)	6
d.I)	7
d.II)	7
e.I)	7
e.II)	8
oppgave 2	9
a)	9
b)	9
c)	10
d)	11
e)	12
oppgave 3	13
a)	13
b)	13
c)	13
d)	13
oppgave 4	14
a)	14
b)	15
c)	15
d)	15
oppgave 5	16
a)	16
b)	16
c)	17
d)	17
e)	18

oppgave 1

a.I)

$$(x - 3)(2x + 4) > 0$$

$$2x^2 + 4x - 6x - 12 > 0$$

$$2x^2 - 2x - 12 > 0$$

setter denne lik null og løser

$$2x^2 - 2x - 12 = 0$$

$$\begin{aligned} x &= \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-12)}}{2 \cdot 2} \\ &= \frac{2 \pm \sqrt{4 + 96}}{4} \\ &= \frac{2 \pm 10}{4} \\ &= -2 \quad \vee \quad = 3 \end{aligned}$$

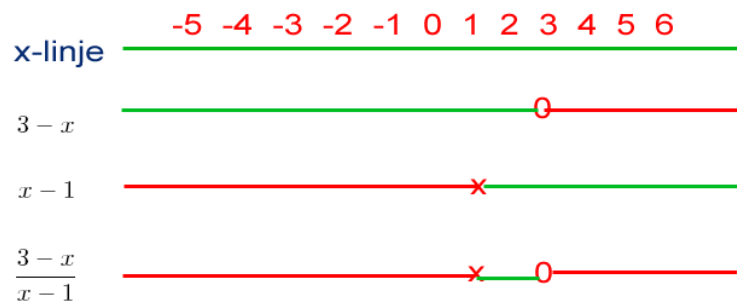
Av funksjonsuttrykket ser vi at koeffesienten $a > 0$ i $ax^2 + bx + c$, og følgelig er dette en parabel med den hule siden opp. Dermed vil ulikheten være sann for

$$x \in \langle \leftarrow, -2 \rangle \cup \langle 3, \rightarrow \rangle$$

a.II)

$$\begin{aligned} \frac{x+1}{x-1} &< 2 \\ \frac{x+1}{x-1} - 2 &< 0 \\ \frac{x+1-2(x-1)}{x-1} &< 0 \\ \frac{x+1-2x+2}{x-1} &< 0 \\ \frac{3-x}{x-1} &< 0 \end{aligned}$$

Tegner fortegnskjema



Vi ser at

$$x \in \langle \leftarrow, 1 \rangle \cup \langle 2, \rightarrow \rangle$$

b.I)

$$\begin{aligned} 3 \tan x &= 1 & x &\in [0^\circ, 360^\circ) \\ \tan x &= \frac{1}{3} \\ x &= \arctan\left(\frac{1}{3}\right) \\ x &\approx 18,4^\circ & \vee & \quad x \approx 180^\circ + 18,4^\circ = 198^\circ \end{aligned}$$

b.II)

$$4 \sin^2 x + 4 \sin x - 3 = 0 \quad x \in [0^\circ, 360^\circ)$$

bruker *abc*-formelen

$$\begin{aligned} \sin x &= \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 4 \cdot (-3)}}{2 \cdot 4} \\ &= \frac{-4 \pm \sqrt{64}}{8} \\ &= \frac{-4 \pm 8}{8} \\ &= -1,5 \quad \vee \quad = 0,5 \end{aligned}$$

Vi vet at

$$-1 \leq \sin x \leq 1$$

dermed

$$\sin x = 0,5$$

$$x = \arcsin(0,5)$$

$$x = 30^\circ \quad \vee \quad x = 180^\circ - 30^\circ = 150^\circ$$

c.I)

$$\begin{aligned} f(x) &= 3x \cdot e^x \\ f'(x) &= 3 \cdot (x)' \cdot e^x + 3x \cdot (e^x)' \\ &= 3 \cdot e^x + 3x \cdot e^x \\ &= (1+x)3e^x \end{aligned}$$

c.II)

$$\begin{aligned} g(x) &= \frac{\ln x^2}{x-3} \\ g(x) &= \frac{2 \ln x}{x-3} \\ g'(x) &= \frac{2(\ln x)' \cdot (x-3) - \ln x \cdot (x-3)'}{(x-3)^2} \\ &= \frac{2 \cdot \frac{1}{x} \cdot (x-3) - \ln x}{(x-3)^2} \\ &= \frac{2(x-3) - x \cdot \ln x}{x \cdot (x-3)^2} \end{aligned}$$

d.I)

Jeg gjør denne oppgaven i d.II, samme integralet, men i d.II vil de ha flere opplysninger.

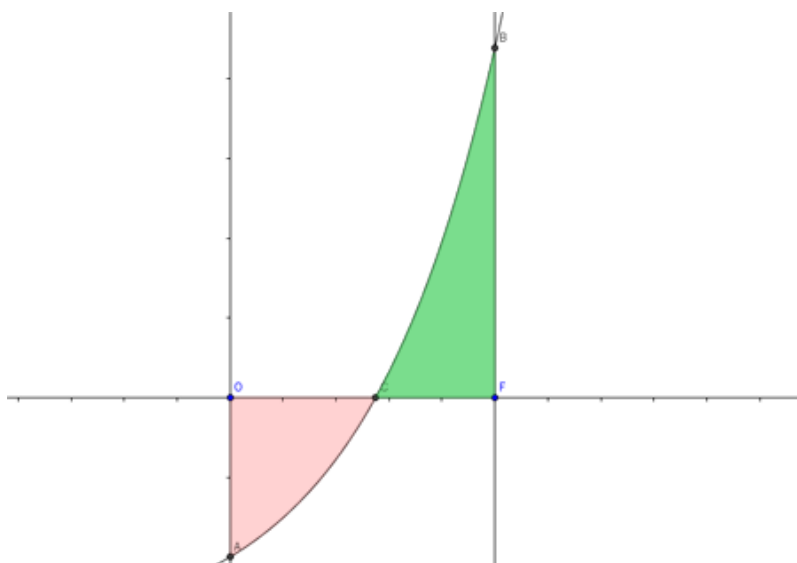
d.II)

$$\begin{aligned}\int_0^1 (e^{2x} - 3) dx &= \left. \frac{1}{2}e^{2x} - 3x \right|_0^1 \\ &= \frac{1}{2}e^2 - 3 - \left(\frac{1}{2}e^0 \right) \\ &= \frac{1}{2}e^2 - 3 - \frac{1}{2} \\ &\approx 0,195\end{aligned}$$

Vi har funnet arealet mellom x -aksen og grafen til

$$f(x) = e^{2x} - 3$$

mellom $x = 0$ og $x = 1$.



Det røde arealet er trukket fra det grønne (fordi det ligger under x -aksen).

e.I)

Vi skal finne arealet av $\triangle ABC$

$$A = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BC \cdot \sin \angle C$$

$$A = \frac{1}{2} \cdot 11 \cdot 7 \cdot \sin(100^\circ)$$

$$A \approx 37,9$$

e.II)

Bruker cosinussetningen.

$$\begin{aligned}AB^2 &= AC^2 + BC^2 - 2 \cdot AC \cdot BC \cdot \cos \angle C \\&= 11^2 + 7^2 - 2 \cdot 11 \cdot 7 \cdot \cos(100^\circ) \\AB &= \sqrt{170 - 154 \cdot \cos(100^\circ)} \\&\approx 14\end{aligned}$$

Så vil vi finne $\angle A$

$$\begin{aligned}BC^2 &= AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot \cos \angle A \\ \cos \angle A &= \frac{BC^2 - AB^2 - AC^2}{-2 \cdot AB \cdot AC} \\ &= \frac{7^2 - 14^2 - 11^2}{-2 \cdot 14 \cdot 11} \\ \angle A &= \arccos\left(\frac{-268}{-308}\right) \\ &\approx 29,5^\circ\end{aligned}$$

og

$$\angle B = 180^\circ - (\angle A + \angle C) = 180^\circ - 129,5^\circ = 50,5^\circ$$

oppgave 2

a)

Vi er gitt $A(1, 1)$, $B(5, 3)$ og $C(8, 7)$ og finner vektorene og lengdene av dem nedenfor.

$$\overrightarrow{AB} = [5 - 1, 3 - 1] = [4, 2]$$

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{4^2 + 2^2} = \sqrt{18}$$

$$\overrightarrow{AC} = [8 - 1, 7 - 1] = [7, 6]$$

$$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{7^2 + 6^2} = \sqrt{85}$$

$$\overrightarrow{BC} = [8 - 5, 7 - 3] = [3, 4]$$

$$|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{3^2 + 4^2} = \sqrt{25} = 5$$

Som vi ser er ikke lengden av noen av vektorene like, dermed er **ikke** $\triangle ABC$ likebeint.

b)

Vi er gitt at l er parallell med linja \overrightarrow{AB} , derfor bruker vi den som retningsvektor. Videre bruker vi C for å posisjonere l

$$l: \quad [x, y] = [8, 7] + [4, 2] \cdot t$$

dette gir oss parameterfremstillingen

$$l: \quad x = 8 + 4t \quad \wedge \quad y = 7 + 2t$$

c)

Hvis l skjærer andreaksen i D , så vet vi at $x = 0$ i dette punktet, altså setter vi

$$0 = 8 + 4t$$

og løser med hensyn på t

$$t = -2$$

dette setter vi inn i y

$$y = 7 + 2 \cdot (-2) = 3$$

og dermed har vi bestemt $D(0, 3)$, videre finner vi

$$\overrightarrow{AD} = [0 - 1, 3 - 1] = [-1, 2]$$

$$\overrightarrow{DC} = [8 - 0, 7 - 3] = [8, 4]$$

så;

$$\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{DC} = [-1, 2] \cdot [8, 4] = -8 + 8 = 0$$

Ja, skalarproduktet er 0, så

$$\overrightarrow{AD} \perp \overrightarrow{DC}$$

d)

Vi er gitt at

$$\overrightarrow{BP} = \frac{3}{7}\overrightarrow{PD}$$

så

$$[x - 5, y - 3] = \frac{3}{7} \cdot [0 - x, 3 - y]$$

$$[x - 5, y - 3] = \left[-\frac{3}{7}x, \frac{3}{7}(3 - y) \right]$$

så vi har likningssettet

$$x - 5 = -\frac{3}{7}x \quad \vee \quad y - 3 = \frac{3}{7}(3 - y)$$

Vi løser først med hensyn på x

$$x + \frac{3}{7}x = 5$$

$$\frac{10}{7}x = 5$$

$$x = \frac{5 \cdot 7}{10}$$

$$x = 3,5$$

og deretter med hensyn på y

$$y - 3 = \frac{3}{7} \cdot (3 - y)$$

$$y - 3 = \frac{9}{7} - \frac{3}{7}y$$

$$y + \frac{3}{7}y = \frac{9}{7} + 3$$

$$\frac{10}{7}y = \frac{30}{7}$$

$$y = \frac{\frac{30}{7}}{\frac{10}{7}}$$

$$y = 3$$

altså er punktet, $P(3,5,3)$

e)

Gitt

$$\overrightarrow{AP} = p \cdot \overrightarrow{AB} + q \cdot \overrightarrow{AD}$$

som på koordinatform blir

$$[3, 5 - 1, 3 - 1] = p \cdot [4, 2] + q \cdot [-1, 2]$$

$$[2, 5, 2] = p \cdot [4, 2] + q \cdot [-1, 2]$$

dette danner et likningssett med to ukjente, nemlig

$$2, 5 = 4p - q \tag{1}$$

$$2 = 2p + 2q \tag{2}$$

vi løser (1) med hensyn på p

$$p = \frac{2, 5 + q}{4}$$

og setter inn for p i (2) og løser med hensyn på q

$$2 = 2 \cdot \frac{2, 5 + q}{4} + 2q$$

$$2 = 1, 25 + 2, 5q$$

$$q = \frac{0, 75}{2, 5}$$

$$q = 0, 3$$

og setter deretter inn for q og løser med hensyn på p

$$p = \frac{2, 5 + 0, 3}{4}$$

$$p = 0, 7$$

Ved å sette inn for p og q i det opprinnelige uttrykket, så ser vi at svaret stemmer;

$$[2, 5, 2] = 0, 7 \cdot [4, 2] + 0, 3 \cdot [-1, 2]$$

$$[2, 5, 2] = [2, 8, 1, 4] + [-0, 3, 0, 6]$$

$$[2, 5, 2] = [2, 5, 2]$$

oppgave 3**a)**

Vi bruker hypergeometrisk sannsynlighetsfordeling.

$$P(2S) = \frac{\binom{16}{2}}{\binom{30}{2}} = \frac{120}{435} \approx 0,276$$

b)

$$P(7S \cap 3R) = \frac{\binom{16}{7} \cdot \binom{14}{3}}{\binom{30}{10}} \approx 0,139$$

c)

Vi definerer slik;

- K = 'Koppermynt'
- F = 'Laget før 1945'

Vi vil finne den totale sannsynligheten for at vi trekker en koppermynt. Slik foregår det;

$$\begin{aligned} P(K) &= P(F) \cdot P(K|F) + P(\bar{F}) \cdot P(K|\bar{F}) \\ &= 0,40 \cdot 0,45 + 0,6 \cdot 0,35 \\ &= 0,39 \end{aligned}$$

Det er altså 39% sannsynlighet for at vi har trukket en kobbermynt. (Trodde det skrives kopper?)

d)

Vi får nå oppgitt at, ja, vi har trukket en kobbermynt, og nå vil de vite hvor stor sannsynligheten var for at den ble laget før 1940. Dette er altså omvendt sannsynlighet, og derfor bryker vi rockepresten Bayes' setning.

$$P(F|K) = \frac{P(F) \cdot P(K|F)}{P(K)} = \frac{0,40 \cdot 0,45}{0,39} \approx 0,474$$

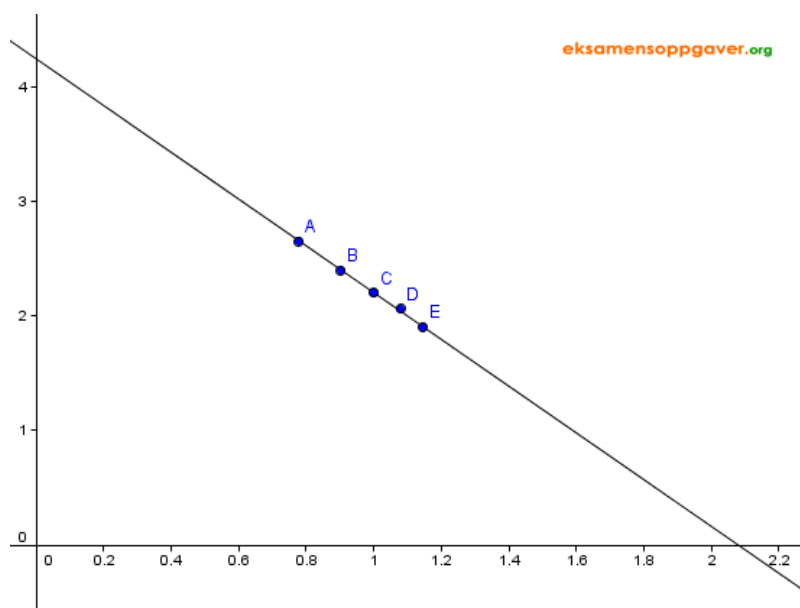
Altså omlag 47,7% sannsynlighet for at den ble laget før 1940.

oppgave 4

Vi er gitt tabellen:

x	Høyden i meter	6	8	10	12	14
y	Antall trær per mål	450	250	160	115	80

a)



Som vi ser av grafen, ligger de logaritmiske punktene nogen lunde på ei rett linje. Dette er et tegn på at en potensfunksjon på formen

$$f(x) = b \cdot x^a$$

er en god modell for dataene i tabellen.

b)

Punsher dataene fra tabellen ovenfor inn i 'STAT' menyen på kalkulatoren. Foretar regresjon, ser at potensfunksjonen passer ypperlig, og konstaterer at en god modell er

$$f(x) = 16556,8 \cdot x^{-2,01}$$

obs, a og b er rundet av til henholdsvis 2 og 1 desimal(er).

c)

Vi setter $x = 15$ og løser

$$f(15) = 16556,8 \cdot 15^{-2,01} \approx 71,6$$

Omlag 71,6 trær per mål.

d)

vi setter $f = 300$ og løser med hensyn på x

$$16556,8 \cdot x^{-2,01} = 300$$

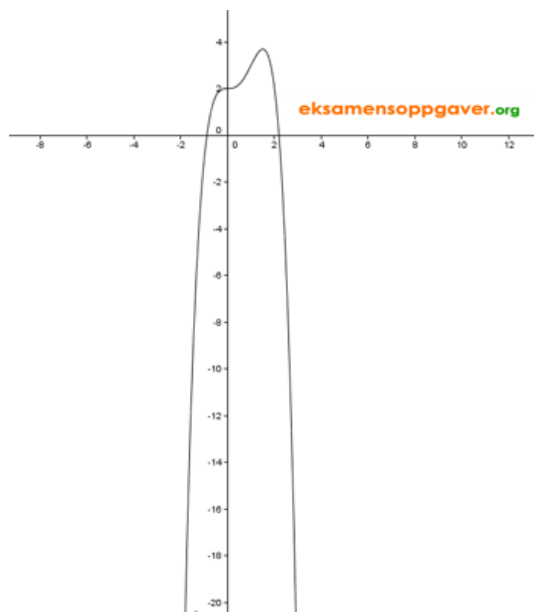
$$x = \frac{1}{2,01 \sqrt[2,01]{\frac{300}{16556,8}}}$$

$$x \approx 7,4$$

Omkring 7,4 meter.

oppgave 5

a)



b)

Vi deriverer

$$\begin{aligned}h'(x) &= -(x^4)' + 2 \cdot (x^3)' + (2)' \\ &= -4x^3 + 6x^2\end{aligned}$$

Finner ekstremalpunktene ved å sette

$$-4x^3 + 6x^2 = 0$$

faktoriserer

$$-2 \cdot 2x^2 \cdot x + 2 \cdot 3 \cdot x^2 = 0$$

Vi ser at vi kan skrive

$$2x^2 \cdot (3 - 2x) = 0$$

Dette viser at vi finner løsninger for

$$x = 0 \quad \vee \quad x = 1,5$$

Av grafen i deloppgave a, så ser vi at $x = 1,5$ angir fjelltoppen.

$$h(1,5) = -(1,5)^4 + 2(1,5)^3 + 2 = 3,6875 \Big| \cdot 100 = 368,75 \text{ m}$$

c)

Vi dobbeltderiverer

$$h''(x) = -4 \cdot (x^3)' + 6 \cdot (x^2)'$$

$$h''(x) = -12x^2 + 12x$$

og så setter vi den dobbeltderiverte lik 0

$$-12x^2 + 12x = 0$$

$$12x(1 - x) = 0$$

og ser at

$$x = 0 \quad \vee \quad x = 1$$

dermed er vendepunktene i

$$h(0) = 2$$

$$h(1) = 3$$

punktene $V_1(0, 2)$ og $V_2(1, 3)$. I disse punktene er fjellprofilen iferd med å skifte, altså 'brattest' fordi den er på vei til å skifte. I V_1 er denne 'tilbrattningen' svært liten, men i V_2 er den meget merkbar, og dette er det bratteste punktet på fjellprofilen.

d)

Fra definisjonen på den deriverte, så vet vi at $h'(x)$ beskriver stigningstallet til tangenten i et gitt punkt. Og stigningstallet er jo som kjent

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

som jo er forholdet mellom 'hosliggende katet' og 'motstående katet', hvilket er definisjonen på

$$\tan \theta$$

Vi setter

$$\begin{aligned} \tan v &= h'(1) \\ &= -4(1)^3 + 6 \cdot (1)^2 \\ &= -4 + 6 \\ v &= \arctan(2) \\ &\approx 63,4^\circ \end{aligned}$$

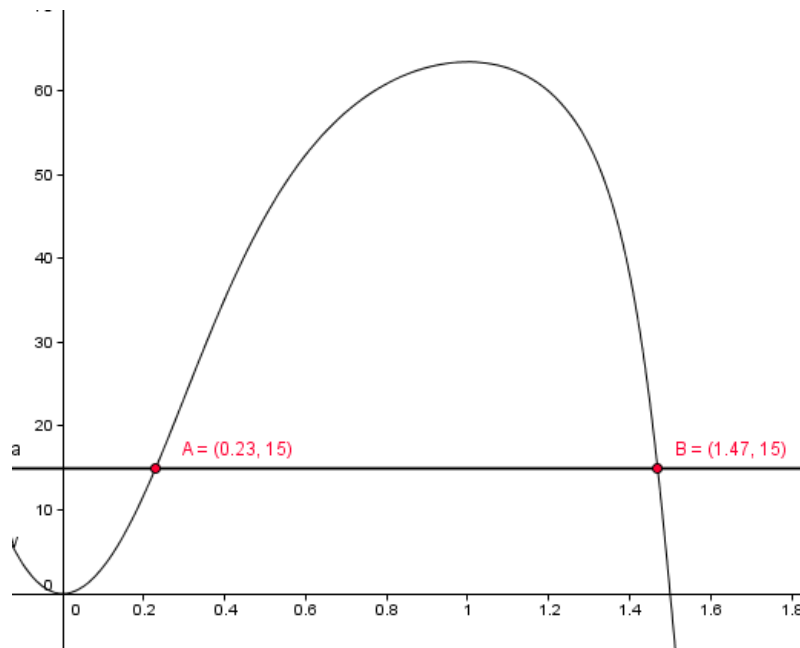
e)

Plotter inn at

$$v = \arctan(6x^2 - 4x^3)$$

og

$$y = 15$$

dermed ser vi at $v > y$ for

$$x \in \langle 0, 23, 1, 47 \rangle$$

Dersom du er interessert, finner du flere [løsningsforslag](http://eksamensoppgaver.org) på eksamensoppgaver.org

SLUTT