Utdanningsdirektoratet

Eksamen

05.12.2008

AA6524/AA6526 Matematikk 3MX
Elevar og privatistar / Elever og privatister

Nynorsk/Bokmål

Bokmål

Eksamensinformasjon	
Eksamenstid:	5 timer
Hjelpemidler:	Se gjeldende regler.
Vedlegg:	Ingen
Andre opplysninger:	På første side av svararket skal du skrive navn og type på den lommeregneren du har brukt på eksamen.
Framgangsmåte og forklaring:	Der oppgaveteksten ikke sier noe annet, kan du fritt velge framgangsmåte. Om oppgaven krever en bestemt løsningsmetode, vil også en alternativ metode kunne gi noe uttelling. Før inn nødvendig mellomregning. Skriv forklaring der dette er påkrevd, for å vise hva du har gjort. Ved åpne oppgaveformuleringer bør du forklare hvorfor du har valgt din tolkning av oppgaven og ditt valg av løsningsstrategi. Husk å oppgi eventuelle kilder.
Grafer og bruk av grafisk lommeregner:	Oppgi de lommeregnerfunksjonene du har brukt. Det er ikke nødvendig å oppgi alle tastetrykkene. Husk å skrive målestokk og enheter på aksene når du *tegner* grafer i besvarelsen. Du trenger ikke føre inn tabell over utregnede funksjonsverdier dersom det ikke er spurt spesielt etter det i oppgaven. Ved grafisk løsning på lommeregner er det tilstrekkelig at du *skisserer* kurvens form i besvarelsen. På skissen skal svaret markeres tydelig.
Veiledning om vurderingen:	Karakteren fastsettes etter en *helhetlig* vurdering. Det betyr at sensor vurderer i hvilken grad du – viser grunnleggende ferdigheter – kan bruke hjelpemidler – gjennomfører logiske resonnementer – ser sammenhenger i faget, er oppfinnsom og kan anvende fagkunnskap i nye situasjoner – vurderer om svar er rimelige – forklarer framgangsmåter og begrunner svar – skriver oversiktlig og er nøyaktig med utregninger, benevninger, tabeller og grafiske framstillinger.

Oppgave 1

a) Deriver funksjonen $f(x)=\dfrac{\sin x}{x^2}$

b) Deriver funksjonen $g(x)=x\cdot\cos\left(x^2\right)$

c) Bestem integralet $\int 3\cos(2x)\,dx$

d) Bestem integralet $\int x^2\cdot\sin x\,dx$

e) Finn ved regning sentrum og radius i den kula som er gitt ved likningen

$$x^2+y^2+z^2-6x+2y+7=0$$

f) Finn volumet av det omdreiningslegemet som framkommer ved at grafen til funksjonen $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ dreies 360° om x-aksen. La $x\in\left[-1\,,\,1\right]$ Hva slags romlegeme har du funnet volumet av?

g) En stokastisk variabel X har følgende sannsynlighetsfordeling:

x	1	2	3	4
$P(X=x)$	0,1	0,3	0,4	0,2

1) Finn forventningsverdien og variansen til X.

En annen stokastisk variabel Y er gitt ved $Y=2X+1$.

2) Finn forventningsverdien og variansen til Y.

Oppgave 2

Sannsynligheten for å overleve en spesiell type operasjon er antatt å være lik 0,9.

a) Hva er sannsynligheten for at nøyaktig 16 av 20 pasienter vil overleve denne operasjonen? Hva kalles sannsynlighetsfordelingen du bruker her, og hvilke forutsetninger ligger til grunn for at du kan bruke denne fordelingen?

Når vi ser på et tilstrekkelig stort antall pasienter, vil fordelingen ovenfor nærme seg normalfordelingen. Vi ser nå på 100 pasienter.

b) Vis at forventningsverdien og standardavviket til denne normalfordelingen er $\mu = 90$ og $\sigma = 3$.

c) Finn sannsynligheten for at færre enn 84 pasienter av 100 vil overleve operasjonen. Hva er sannsynligheten for at antallet overlevende pasienter er mellom 84 og 93?

En forsker er usikker på om sannsynligheten for å overleve operasjonen virkelig er 0,9. Han bestemmer seg derfor for å undersøke resultatet av 90 tilfeldige operasjoner av denne typen. Av disse var det 63 pasienter som overlevde.

d) Vi tenker oss at p er sannsynligheten for å overleve denne typen operasjon. Finn et estimat for p, og finn standardfeilen til estimatoren i den undersøkelsen forskeren har gjennomført.

e) Sett opp et 95 % konfidensintervall for p. Hva kan du si om p etter at du har satt opp dette intervallet?

Oppgave 3

På et sted gikk sola opp og ned til følgende klokkeslett noen dager i 2006:

Dag nr.	20	49	84	116	134	159	213	272	304	352
Sol opp kl.	10:00	9:00	7:00	5:00	4:00	3:00	3:00	6:00	8:00	10:00
Sol ned kl.	15:19	16:35	18:51	20:50	21:44	22:28	21:47	18:20	16:23	14:50

Vi kan vise at

$$f(x) = 3{,}9\ \sin\left(0{,}017\,x - 1{,}40\right) + 18{,}7$$

passer med solnedgangstidene i 2006, gitt som desimaltall. Her er x antall dager etter nyttår.

a) Finn ved regning hvilken dag i året sola gikk seinest ned.

Vi kaller funksjonen for soloppgangstidene for g.

b) Finn et funksjonsuttrykk for $g(x)$.

Vi definerer daglengden $h(x)$ timer ved $h(x) = f(x) - g(x)$.

c) Tegn grafen til h, og skriv $h(x)$ på formen $h(x) = A\sin(cx + \varphi) + d$.

Daglengden øker raskest ved vårjevndøgn.

d) Bruk resultatet fra c) og finn ved regning når det er vårjevndøgn.

Oppgave 4

Du skal besvare enten alternativ I eller alternativ II.
De to alternativene er likeverdige ved vurderingen.

(Dersom besvarelsen inneholder deler av begge,
vil bare det du har skrevet på alternativ I, bli vurdert.)

Alternativ I

Kim skal prøve en bestemt type medisin. Til å begynne med får han bare én tablett. Tabletten inneholder 2 mg av medisinen. Medisinen brytes ned i kroppen med 5 % per dag.

a) Hvor mye medisin er det i kroppen 7 dager etter at Kim har tatt denne ene tabletten?

b) Hvor lang tid tar det før medisinmengden i kroppen er redusert til 1 mg?

Kim er kronisk syk. Legen sier at han må ta én tablett hver dag. Kim følger anbefalingen.

c) Hvor mye medisin er det nå i kroppen rett etter at Kim har tatt tabletten den sjuende dagen?

d) Hvor mye medisin vil Kim ha i kroppen hvis han fortsetter med denne dosen i "uendelig" mange dager?

Etter en tid får Kim lyst til å ta medisin bare én gang i uka.

e) Hvor mye medisin må han da eventuelt ta hver gang for at den totale medisinmengden i kroppen etter lang tids forbruk skal nærme seg den medisinmengden du fant i d)?

Alternativ II

Vi har gitt punktene

$A(0,0,0)$, $B(3,3,0)$, $C(4,2,4)$, $D(1,-1,4)$ og $T(6,-3,0)$.

a) Vis at firkanten $ABCD$ er et kvadrat.

b) Bestem koordinatene til midtpunktet M på BD.

c) Vis at $\overrightarrow{MT}$ står normalt på planet gjennom punktene A, B, C og D. Finn volumet av pyramiden $ABCDT$.

d) Finn en parameterframstilling for linja l som går gjennom punktene T og M.

e) Undersøk om det finnes et punkt S på l som ligger like langt fra alle hjørnene i pyramiden $ABCDT$.

Oppgave 5

Grafen til $r(\theta) = 1 + \cos\theta$ kalles en kardioide.

a) Tegn grafen til r for $\theta \in [0, 2\pi]$.

b) Bestem arealet av det området som ligger inne i kardioiden og utenfor sirkelen $r = 1$.

c) Bruk sammenhengen mellom polarkoordinater og kartesiske koordinater til å forklare at $y = (\sin\theta) \cdot (1 + \cos\theta)$.

d) Finn ved regning den største og minste verdien som y kan ha i et punkt på kardioiden.

e) Finn ved regning den største og minste verdien som x kan ha i et punkt på kardioiden.

Kolstadgata 1
Postboks 2924 Tøyen
0608 OSLO
Telefon 23 30 12 00
Telefaks 23 30 12 99
www.utdanningsdirektoratet.no

Utdanningsdirektoratet