Løsningsforslag for eksamen i
AA6526 Matematikk 3MX - 5. desember 2008

eksamensoppgaver.org

Om løsningsforslaget

Løsningsforslaget for matematikkeksamen i 3MX er gratis, og det er lastet ned på eksamensoppgaver.org. Løsningen er myntet på elever og privatister som vil forbrede seg til eksamen i matematikk. Lærere må gjerne bruke løsningsforslaget i undervisningsøyemed, men virksomheter har ingen rett til å anvende dokumentet.

Løsningsforslagene skal utelukkende distribueres fra nettstedet eksamensoppgaver.org, da det er viktig å kunne føye til og rette eventuelle feil i ettertid. På den måten vil alle som ønsker det, til enhver tid finne det siste oppdaterte verket. eksamensoppgaver.org ønsker videre at flest mulig skal få vite om eksamensløsningene, slik at det finnes et eget nettsted hvor man kan tilegne seg dette gratis.

Dersom du sitter på ressurser du har mulighet til å dele med deg, eller ønsker å bidra på annen måte, håper eksamensoppgaver.org på å høre fra deg.

Innholdsfortegnelse

oppgave 1

a)

Deriverer med kvotientregelen.

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{\sin x}{x^2} \\
f'(x) &= \frac{(\sin x)' \cdot x^2 - \sin x \cdot \left(x^2\right)'}{\left(x^2\right)^2} \\
&= \frac{\cos x \cdot x^2 - \sin x \cdot 2x}{x^{2\cdot 2}} \\
&= \frac{x \cos x - 2 \sin x}{x^3}
\end{aligned}
$$

b)

Deriverer med kjerne- og produktregelen.

$$
\begin{aligned}
g(x) &= x \cos\left(x^2\right) \\
g'(x) &= (x)' \cdot \cos\left(x^2\right) + x \cdot \left(\cos\left(x^2\right)\right)' \cdot \left(x^2\right)' \\
&= 1 \cdot \cos\left(x^2\right) + x \cdot \left(-\sin\left(x^2\right)\right) \cdot 2x \\
&= \cos\left(x^2\right) - 2x^2 \sin\left(x^2\right)
\end{aligned}
$$

c)

Løser det uegentlige integralet.

$$
\begin{aligned}
\int 3\cos(2x)\,dx &= \\
3 \cdot \int \cos(2x)\,dx &= 3 \cdot \frac{1}{2}\sin(2x) \\
&= \frac{3}{2}\sin(2x) + C
\end{aligned}
$$

d)

Løser det ubestemte integralet ved delvis integrasjon.

$$\int x^2 \cdot \sin x \, dx$$

$$u' = \sin x \qquad u = -\cos x$$

$$v' = 2x \qquad v = x^2$$

$$\int x^2 \cdot \sin x \, dx = x^2 \cdot (-\cos x) - \int 2x \cdot (-\cos x) \, dx$$
$$= -x^2 \cos x + 2 \cdot \int x \cos x \, dx$$

Bruker delvis integrasjon på det andre integralet igjen. Setter

$$u' = \cos x \qquad u = \sin x$$

$$v' = 1 \qquad v = x$$

og løser

$$\begin{aligned}
\int x^2 \cdot \sin x \, dx &= -x^2 \cos x + 2 \cdot \int x \cos x \, dx \\
&= -x^2 \cos x + 2 \cdot \left(x \sin x - \int \sin x \, dx \right) \\
&= -x^2 \cos x + 2 \left(x \sin x - (-\cos x) \right) \\
&= -x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x \\
&= 2 \cdot (x \sin x + \cos x) - x^2 \cos x + C
\end{aligned}$$

e)

Vi skal finne sentrum og radius i kula som er gitt ved likningen

$$x^2 + y^2 + z^2 - 6x + 2y + 7 = 0$$

Bruker metoden for fullstendige kvadrater

$$(x-3)^2 = x^2 - 6x + 9$$

$$(y+1)^2 = y^2 + 2y + 1$$

dermed får vi

$$(x-3)^2 + (y+1)^2 + z^2 = -7 + 9 + 1$$
$$(x-3)^2 + (y+1)^2 + z^2 = 3$$

altså en kule med sentrum i $S(3, -1, 0)$ og med radius $r = \sqrt{3}$.

f)

Grafen til

$$f(x) = \sqrt{1-x^2}$$

ligger symmetrisk om andreaksen, slik at vi kan multiplisere integralet med 2 og sette nedre grense til 0.

$$2\pi \cdot \int_0^1 \left(\sqrt{1-x^2}\right)^2 \, dx$$

da får vi

$$\begin{aligned}
2\pi \cdot \int_0^1 \left(1-x^2\right) \, dx &= 2\pi \cdot \left[x - \frac{1}{3}x^3\right]_0^1 \\
&= F(1) - F(0) \\
&= 2\pi - 2\pi \cdot \frac{1}{3} \\
&= \frac{6\pi - 2\pi}{3} \\
&= \frac{4}{3}\pi
\end{aligned}$$

Vi har funnet volumet av ei kule med radius, $r = 1$.

g.1)

x	1	2	3	4
$P(X=x)$	$0,1$	$0,3$	$0,4$	$0,2$

Forventningsverdi

$$\mu = E(X) = 1 \cdot (0,1) + 2 \cdot (0,3) + 3 \cdot (0,4) + 4 \cdot (0,2) = 2,7$$

Variansen

$$Var(X) = \sum_{i=1}^{4} (x_i - \mu)^2 \cdot P(X = x) = 0,81$$

g.2)

$$Y = 2X + 1$$

så

$$E(Y) = 2 \cdot E(X) + 1 = 2 \cdot 2,7 + 1 = 5,4 + 1 = 6,4$$

og

$$Var(Y) = 2^2 \cdot Var(X) = 4 \cdot 0,81 = 3,24$$

oppgave 2

a)

Vi kaller X = 'Antall personer som vil overleve operasjonen';

$$P(X = 16) = \binom{20}{16} \cdot (0,9)^{16} \cdot (0,1)^4 \approx 0,090$$

Sannsynlighetsfordelingen vi bruker her heter binomisk sannsynlighetsfordeling. Det gjør vi for enten så overlever personen, eller så dør vedkommende. Vi forutsetter derfor at sannsynligheten for at enhver peson overlever personen er lik.

b)

Siden vi bruker binomisk sannsynlighetsfordeling, så kan vi sette

$$\mu = 100 \cdot 0,9 = 90$$

og

$$\sigma = \sqrt{100 \cdot 0,9 \cdot 0,1} = \sqrt{9} = 3$$

c)

Bruker kalkulatoren og plotter inn μ og σ (fra deloppgave b) i tillegg til Lower, 0 og Upper, 84 under 'STAT', 'Dist', 'Norm' og 'Ncd' på kalkulatoren (Casio fx-9750G Plus).

$$P(X < 83) = 0,02275$$

samme, men denne gangen setter vi Lower, 84 og Upper, 93

$$P(84 < X < 93) = 0,81859$$

d)

Estimatet

$$\hat{p} = \frac{63}{90} = 0,7$$

og standardfeilen

$$S_{\hat{p}} = \sqrt{\frac{0,7 \cdot 0,3}{90}} \approx 0,0483$$

e)

Vi setter

$$\langle \hat{p} \mp z \cdot S_{\hat{p}} \rangle$$

og siden vi skal ha et 95% konfidensintervall, så er

$$z = 1,96$$

slik at

$$\langle 0,7 - 1,96 \cdot 0,0483\,,\ 0,7 + 1,96 \cdot 0,0483 \rangle$$

som rundet av til 3 desimaler blir

$$\langle 0,605\,,\ 0,795 \rangle$$

som vi ser, ligger $p = 0,90$ utenfor konfidensintervallet. Det er dermed svært sannsynlig at p er altfor høy. Dessuten er $\hat{p}$ middelverdien til konfidensintervallet og $\hat{p} < p$.

oppgave 3

a)

Ettersom funksjonen

$$f(x) = 3,9\sin(0,017x - 1,40) + 18,7$$

gir solnedgangstidene i 2006, gitt som desimaltall, så vil dagen i året da sola gikk senest ned være gitt når funksjonen er på sitt meste. Det skjer når

$$\sin(0,017x - 1,40) = 1$$

så

$$0,017x - 1,40 = \frac{\pi}{2}$$
$$x = \frac{\frac{\pi}{2} + 1,40}{0,017}$$
$$x \approx 174,75$$

så dette skjedde den 175 dagen.

b)

Ved å plotte inn følgende verdier under ‘STAT‘ i hver sin liste

Dag nr.	20	49	84	116	134	159	213	272	304	352
Sol opp kl.	10 : 00	9 : 00	7 : 00	5 : 00	4 : 00	3 : 00	3 : 00	6 : 00	8 : 00	10 : 00

Så bruker jeg regresjon, og da finner jeg (avrundet til 2 og 3 desimaler)

$$g(x) = 3,79\sin(0,017x + 1,55) + 6,4$$

c)

$$h(x) = f(x) - g(x)$$

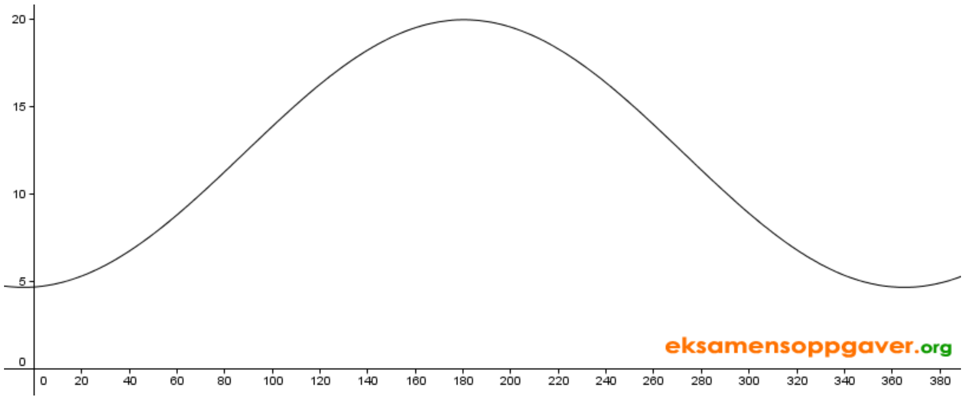
$$h(x) = 3,9\sin(0,017x - 1,40) + 18,7 - (3,79\sin(0,017x + 1,55) + 6,4)$$

trekker sammen litt

$$h(x) = 3,9\sin(0,017x - 1,40) + 18,7 - 3,79\sin(0,017x + 1,55) - 6,4$$

$$h(x) = 3,9\sin(0,017x - 1,40) - 3,79\sin(0,017x + 1,55) + 12,3$$

grafer dette uttrykket.



Fra denne grafen, velger vi oss seks følgende punkter

x	$180,307$	$365,107$	$90,645$	$46,613$	$285,645$
y	$19,955$	$4,645$	$12,656$	$7,357$	$10,630$

Plotter disse verdiene inn i 'STAT' og bruker regresjon slik som i deloppgave b og runder av til 2 og 3 desimaler.

$$h(x) = 7,65\sin(0,017x - 1,49) + 12,3$$

d)

Vi dobbeltderiverer for å finne vendepunktene

$$\begin{aligned}
h(x) &= 7,65\sin(0,017x-1,49)+12,3\\
h'(x) &= 7,65\cdot(\sin(0,017x-1,49))'\cdot(0,017x-1,49)'+(12,3)'\\
&= 0,13005\cos(0,017x-1,49)\\
h''(x) &= 0,13005\cdot(\cos(0,017x-1,49))'\cdot(0,017x-1,49)'\\
&= -0,00221\sin(0,017x-1,49)
\end{aligned}$$

Vi finner vendepunktet når $h''(x)=0$, så

$$\sin(0,017x-1,49)=0$$

$$0,017x_1-1,49=0 \qquad \vee \qquad 0,017x_2-1,49=\pi$$

vi ser kun etter løsninger i første omløp, dermed finner vi vendepunkter når

$$x_1=\frac{1,49}{0,017}\approx 87,65 \qquad \vee \qquad x_2=\frac{\pi+1,49}{0,017}\approx 272,45$$

som vi ser av grafen, så er h på vei nedover ved x_2 og opp ved x_1, dermed finner vi vårjevndøgn den 88 dagen.

oppgave 4 - alternativ I

a)

Vi får ei geometrisk rekke med

$$k = 0,95$$

og

$$a_1 = 2$$

så

$$a_n = 2 \cdot 0,95^{n-1}$$

og etter 7 dager har er det igjen

$$a_7 = 2 \cdot 0,95^{7-1} = 2 \cdot 0,95^6 \approx 1,47 \text{ mg}$$

i kroppen til Kim.

b)

Vi setter opp likningen nedenfor og løser med hensyn på n

$$\begin{aligned}
2 \cdot 0,95^{n-1} &= 1 \\
0,95^{n-1} &= \frac{1}{2} \\
(n-1)\ln(0,95) &= \ln\left(\frac{1}{2}\right) \\
n\ln(0,95) - \ln(0,95) &= \ln(1) - \ln(2) \\
n\ln(0,95) &= \ln(0,95) - \ln(2) \\
n &= \frac{\ln(0,95) - \ln(2)}{\ln(0,95)} \\
&\approx 14,5
\end{aligned}$$

Det tar altså cirka fjorten og en halv dag før medisinen i kroppen til Kim er redusert til 1 mg.

c)

Dersom Kim skal ta en tabelett hver dag, så vil innholdet av tabeletten bygge seg opp, slik;

$$2 + 2 \cdot 0,95 + 2 \cdot 0,95^2 + \ldots + 2 \cdot 0,95^6$$

Vi summerer

$$\begin{aligned} S_7 &= \frac{2 \cdot \left(1 - 0,95^7\right)}{1 - 0,95} \\ &= \frac{2 - 2 \cdot 0,95^7}{0,05} \\ &\approx 12,07 \text{ mg} \end{aligned}$$

d)

Siden $-1 < k < 1$ så vil den geometriske rekka som beskriver innholdet medisin i kroppen til Kim konvergere til

$$\begin{aligned} S &= \frac{2}{1 - 0,95} \\ &= \frac{2}{0,05} \\ &= 40 \text{ mg} \end{aligned}$$

e)

Hvis Kim bare vil ta medisin én gang i uka, så må vi ta høyde for en annerledes kvotient, nemlig

$$0,95^6$$

slik at

$$\begin{aligned} S = \frac{b_1}{1 - 0,95^6} &= 40 \\ b_1 &= 40\left(1 - 0,95^6\right) \\ b_1 &\approx 10,6 \end{aligned}$$

Han må få i seg 10, 6 mg av medisinen som er 5, 3 tabeletter i uka.

oppgave 4 - alternativ II

a)

Vi undersøker om

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| = \left|\overrightarrow{BC}\right| = \left|\overrightarrow{CD}\right| = \left|\overrightarrow{AD}\right|$$

så

$$\begin{aligned}
\left|\overrightarrow{AB}\right| &= |[3-0, 3-0, 0-0]| = |[3,3,0]| = \sqrt{3^2+3^2} = \sqrt{18} \\
\left|\overrightarrow{BC}\right| &= |[4-3, 2-3, 4-0]| = |[1,-1,4]| = \sqrt{1^2+(-1)^2+4^2} = \sqrt{18} \\
\left|\overrightarrow{CD}\right| &= |[1-4, -1-2, 4-4]| = |[-3,-3,0] = \sqrt{(-3)^2+(-3)^2} = \sqrt{18} \\
\left|\overrightarrow{AD}\right| &= |[1,-1,4]| = \sqrt{1^2+(-1)^2+4^2} = \sqrt{18}
\end{aligned}$$

som vi ser, er alle sidene like lange. Videre ser vi om vinklene mellom dem er $90°$ ved å se om skalarproduktet er lik 0.

$$\left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \left|\overrightarrow{BC}\right| = [3,3,0] \cdot [1,-1,4] = 0$$

og

$$\left|\overrightarrow{AD}\right| \cdot \left|\overrightarrow{CD}\right| = [1,-1,4] \cdot [-3,-3,0] = 0$$

Jeppedipepp, da var det bevist :)

b)

Vi finner

$$\overrightarrow{BD} = [1-3, -1-3, 4-0] = [-2,-4,4]$$

deretter setter vi at

$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{BD}$$

her går vi altså fra Origo (A) og til B, og deretter halvveis fra B til D. Da finner vi koordinatene til M

$$\overrightarrow{OM} = [3,3,0] + \frac{1}{2} \cdot [-2,-4,4] = [3,3,0] + [-1,-2,2] = [2,1,2] \quad \Longrightarrow \quad M(2,1,2)$$

c)

Først finner vi at

$$\overrightarrow{MT} = [6-2, -3-1, 0-2] = [4, -4, -2]$$

dersom denne vektoren står normalt på planet gjennom punktene A, B, C og D, så vil den stå normalt på det to vektorene $\overrightarrow{AB}$ og $\overrightarrow{CD}$. Vi kontrollerer om dette er tilfellet

$$\overrightarrow{MT} \cdot \overrightarrow{AB} = [4, -4, -2] \cdot [3, 3, 0] = 12 - 12 = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \overrightarrow{MT} \perp \overrightarrow{AB}$$

og

$$\overrightarrow{MT} \cdot \overrightarrow{CD} = [4, -4, -2] \cdot [-3, -3, 0] = -12 + 12 = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \overrightarrow{MT} \perp \overrightarrow{CD}$$

Som vi ser, er dette tilfellet. Vi finner volumet ved å sette

$$\begin{aligned} V &= \frac{1}{3} \cdot \left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \left|\overrightarrow{AD}\right| \cdot \left|\overrightarrow{MT}\right| \\ &= \frac{1}{3} \cdot \sqrt{18} \cdot \sqrt{18} \cdot \sqrt{4^2 + (-4)^2 + (-2)^2} \\ &= \frac{1}{3} \cdot 18 \cdot 6 \\ &= 36 \end{aligned}$$

d)

Vi bruker retningsvektoren $\overrightarrow{MT}$ og punktet T til å bestemme l.

$$l: \qquad [x, y, z] = [6, -3, 0] + [4, -4, -2] \cdot t$$

hvilket gir oss parameterfremstillingen

$$l: \qquad x = 6 + 4t \quad \wedge \quad y = -3 - 4t \quad \wedge \quad z = -2t$$

e)

Linja, l går jo opp gjennom sentrum av grunnflata i pyramiden og ut av ‘spissen‘, eller ‘toppen‘, på pyramiden. Vi skal altså bestemme tre koordinater til $S(x, y, z)$ der hver av koordinatene er beskrevet av l. Følgelig må

$$\left|\overrightarrow{TS}\right| = \left|\overrightarrow{AS}\right| = \left|\overrightarrow{BS}\right|$$

og vi løser

$$\begin{aligned}
\left|\overrightarrow{TS}\right| &= \left|\overrightarrow{AS}\right| \\
\sqrt{(4t)^2 + (-4t)^2 + (-2t)^2} &= \sqrt{(6+4t)^2 + (-3-4t)^2 + (-2t)^2} \\
\sqrt{16t^2 + 16t^2 + 4t^2} &= \sqrt{(48t + 36 + 16t^2) + (24t + 9 + 16t^2) + (4t^2)} \\
\sqrt{36t^2} &= \sqrt{36t^2 + 72t + 45} \\
36t^2 &= 36t^2 + 72t + 45 \\
72t &= 45 \\
t &= -\frac{45}{72} \\
&= -\frac{5}{8} = -0,625
\end{aligned}$$

Vi setter inn for t i parameterfremstillinga l og finner

$$x = 6 + 4 \cdot (-0,625) = 3,5$$

$$y = -3 - 4 \cdot (-0,625) = 2$$

$$z = -2 \cdot (-0,625) = 1,25$$

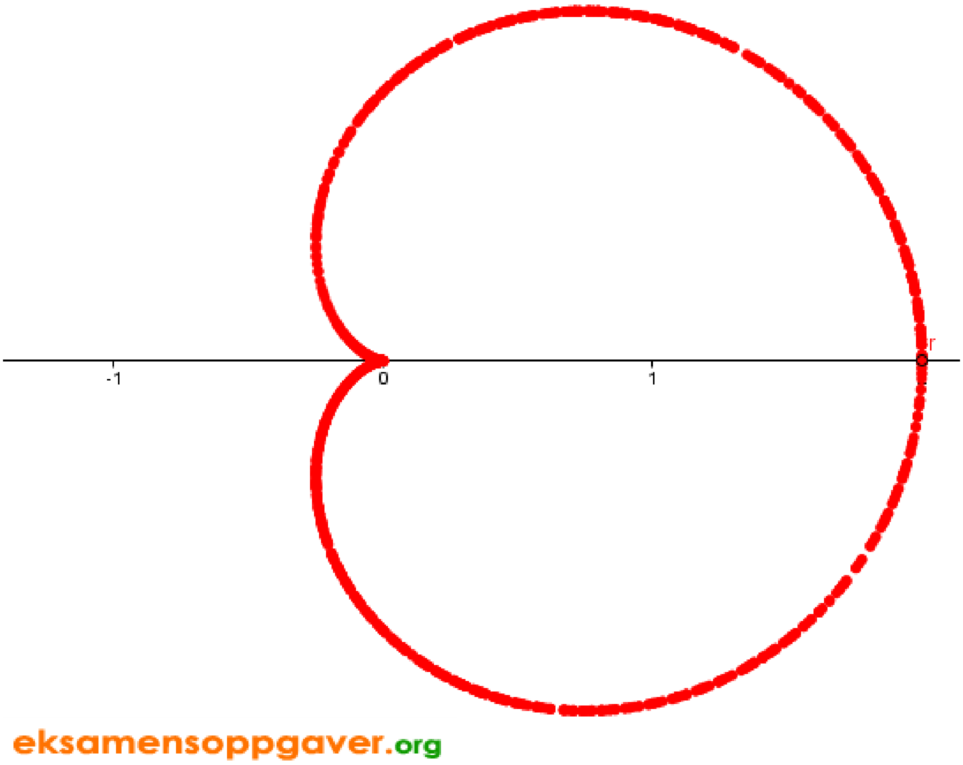
så, ja, og punktet har koordinatene $S(3,5\,,2\,,1,25)$

oppgave 5

a)

Tegner

$$r(\theta) = 1 + \cos\theta \qquad \theta \in [0, 2\pi\rangle$$



b)

For å finne arealet av kardioiden, regner vi ut integralet nedenfor med lommeregneren

$$A_k = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (1+\cos\theta)^2 \, d\theta \approx 4,71$$

Videre vet vi at en sirkel med $r = 1$ har arealet

$$A_s = \pi r^2 = \pi$$

dermed blir arealet utenfor

$$A = A_k - A_s = 4,71 - \pi \approx 1,57$$

Hvilket er $\frac{\pi}{2}$

c)

Vi vet at sammenhengen mellom kartesiske og polare koordinater er

$$x = r \cdot \cos\theta$$

$$y = r \cdot \sin\theta$$

og her er vi jo gitt at $r = 1 + \cos\theta$, så dersom vi serrer inn for r i $y = \cdot \sin\theta$, så finner vi

$$y = (1+\cos\theta) \cdot \sin\theta$$

d)

Ekstremalpunktene til y finner vi ved å derivere og sette den deriverte lik 0.

$$\begin{aligned} y &= (1+\cos\theta)\cdot\sin\theta \\ &= \sin\theta + \sin\theta\cdot\cos\theta \\ y' &= (\sin\theta)' + (\sin\theta)'\cdot\cos\theta + \sin\theta\cdot(\cos\theta)' \\ &= \cos\theta + \cos\theta\cdot\cos\theta + \sin\theta\cdot(-\sin\theta) \\ &= \cos\theta + \cos^2\theta - \sin^2\theta \\ &= \cos\theta + \cos^2\theta - \left(1-\cos^2\theta\right) \\ &= \cos\theta + 2\cos^2\theta - 1 \end{aligned}$$

setter så

$$y' = 0$$

og løser med hensyn på θ

$$\begin{aligned} \cos\theta &= \frac{-1\pm\sqrt{(1)^2-4\cdot 2\cdot(-1)}}{2\cdot 2} \\ &= \frac{-1\pm\sqrt{9}}{4} \\ &= \frac{-1\pm 3}{4} \\ &= -1 \qquad \vee \qquad \frac{1}{2} \end{aligned}$$

og

$$\theta = \arccos(-1) \qquad \vee \qquad = \arccos\left(\frac{1}{2}\right) \qquad \vee \qquad 2\pi - \arccos\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\theta = \pi \qquad \vee \qquad = \frac{\pi}{3} \qquad \vee \qquad \frac{5\pi}{3}$$

dernest setter vi inn for θ i y;

$$y_1 = (1+\cos\pi)\cdot\sin\pi = 0$$

$$y_2 = \left(1+\cos\frac{\pi}{3}\right)\cdot\sin\frac{\pi}{3} = \frac{3}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{4}$$

og

$$y_3 = \left(1+\cos\frac{5\pi}{3}\right)\cdot\sin\frac{5\pi}{3} = \frac{3}{2}\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{3\sqrt{3}}{4}$$

Så ser vi tydelig at y_2 er maksimalverdi, mens y_3 er minimalverdi.

e)

Her setter vi først inn for r og skriver x-komponenten slik

$$x = \cos\theta \cdot (1 + \cos\theta) = \cos\theta + \cos^2\theta$$

dernest deriverer vi x

$$\begin{aligned} x' &= (\cos\theta)' + (\cos\theta)' \cdot \cos\theta + \cos\theta \cdot (\cos\theta)' \\ &= -\sin\theta + (-\sin\theta) \cdot \cos\theta + \cos\theta \cdot (-\sin\theta) \\ &= -\sin\theta - 2\sin\theta \cdot \cos\theta \end{aligned}$$

og så

$$-\sin\theta - 2\sin\theta \cdot \cos\theta = 0$$

$$(-1 - 2\cos\theta) \cdot \sin\theta = 0$$

så

$$\sin\theta = 0$$

$$\theta = 0 \qquad \vee \qquad \theta = \pi$$

og

$$-1 - 2\cos\theta = 0$$

$$-2\cos\theta = 1$$

$$\cos\theta = -\frac{1}{2}$$

$$\theta = \arccos\left(-\frac{1}{2}\right)$$

$$\theta = \pi - \frac{\pi}{3} \qquad \vee \qquad \theta = \pi + \frac{\pi}{3}$$

$$\theta = \frac{2}{3}\pi \qquad \vee \qquad \theta = \frac{4}{3}\pi$$

Dermed

$$x_1 = \cos(0) \cdot (1 + \cos(0)) = 2$$

$$x_2 = \cos(\pi) \cdot (1 + \cos(\pi)) = 0$$

$$x_3 = \cos\frac{2}{3}\pi \cdot \left(1 + \cos\frac{2}{3}\pi\right) = -\frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) = -\frac{1}{4}$$

altså er x_1 maksimalverdien og x_3 minimalverdien x-komponenten kan ha.

Dersom du er interessert, finner du flere løsningsforslag på eksamensoppgaver.org

SLUTT