Løsningsforslag for eksamen i
REA3026 Matematikk S1 - 08.05.2008

eksamensoppgaver.org

Om løsningsforslaget

Løsningsforslaget for matematikk eksamen i S1 er gratis, og det er lastet ned på eksamensoppgaver.org. Løsningen er myntet på elever og privatister som vil forbrede seg til eksamen i matematikk. Lærere må gjerne bruke løsningsforslaget i undervisningsøyemed, men virksomheter har ingen rett til å anvende dokumentet.

Løsningsforslagene skal utelukkende distribueres fra nettstedet eksamensoppgaver.org, da det er viktig å kunne føye til og rette eventuelle feil i ettertid. På den måten vil alle som ønsker det, til enhver tid finne det siste oppdaterte verket. eksamensoppgaver.org ønsker videre at flest mulig skal få vite om eksamensløsningene, slik at det finnes et eget nettsted hvor man kan tilegne seg dette gratis.

Dersom du sitter på ressurser du har mulighet til å dele med deg, eller ønsker å bidra på annen måte, håper eksamensoppgaver.org på å høre fra deg.

Innholdsfortegnelse

oppgave 1

a)

$$\begin{aligned}
2 \cdot 10^x &= 2000 \\
10^x &= \frac{2000}{2} \\
x \log(10) &= \log(1000) \\
x &= 3
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
2 \lg x - 4 &= 0 \\
\lg x &= \frac{4}{2} \\
10^{\lg x} &= 10^2 \\
x &= 100
\end{aligned}$$

c.1)

Vi tar først for oss

$$\begin{aligned}
f(x) &= x^2 - 5x + 6 \\
x^2 - 5x + 6 = 0 & \\
x &= \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2 \cdot 1} \\
&= \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} \\
&= \frac{5 \pm 1}{2} \\
&= 2 \qquad \vee \qquad = 3
\end{aligned}$$

og deretter

$$\begin{aligned}
g(x) &= 2x + 6 \\
2x + 6 &= 0 \\
2x &= -6 \\
x &= -3
\end{aligned}$$

c.2)

$$
\begin{aligned}
f(x) &= g(x)\\
x^2 - 5x + 7 &= 2x + 6\\
x^2 - 7x + 1 &= 0\\
x &= \frac{-(-7) \pm \sqrt{(-7)^2 - 4\cdot 1\cdot 1}}{2\cdot 1}\\
&= \frac{7 \pm \sqrt{49-4}}{2}\\
&= \frac{7 \pm \sqrt{45}}{2}\\
&= \frac{7 \pm 3\sqrt{5}}{2}
\end{aligned}
$$

så da blir skjæringspunktene

$$g\left(\frac{7-3\sqrt{5}}{2}\right) = 2\cdot\frac{7-3\sqrt{5}}{2} + 6 = 13 - 3\sqrt{5}$$

$$g\left(\frac{7+3\sqrt{5}}{2}\right) = 2\cdot\frac{7+3\sqrt{5}}{2} + 6 = 13 + 3\sqrt{5}$$

dermed er skjæringspunktene

$$S_1\left(\frac{7-3\sqrt{5}}{2},\, 13-3\sqrt{5}\right) \approx S_1(0.15, 6.29) \qquad S_2\left(\frac{7+3\sqrt{5}}{2},\, 13+3\sqrt{5}\right) \approx S_2(6.85, 19.71)$$

d)

Vi setter først opp en trekant;

```
row 0                          1
row 1                       1     1
row 2                    1     2     1
row 3                 1     3     3     1
row 4              1     4     6     4     1
row 5           1     5    10    10     5     1
row 6        1     6    15    20    15     6     1
row 7     1     7    21    35    35    21     7     1
row 8  1     8    28    56    70    56    28     8     1
```

Bruker den fjerde raden til å vise at

$$
\begin{aligned}
(x+2)^4 &= x^4 + 4x^3\cdot 2 + 6x^2\cdot 2^2 + 4x\cdot 2^3 + 2^4\\
&= x^4 + 8x^3 + 24x^2 + 32x + 16
\end{aligned}
$$

e.1)

Innfører hendelsene

- B: ‘Kulen er blå‘
- R: ‘Kulen er rød‘
- L: ‘Kulene har lik farge‘

Vi antar videre at dette er et trekk uten tilbakelegg, og antall kuler er selvfølgelig 5. Vi kan trekke blå først og rød etterpå, eller rød først og blå etterpå.

$$\begin{aligned}
P(B \cap R) &= P(B) \cdot P(R|B) + P(R) \cdot P(B|R) \\
&= \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} + \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \\
&= \frac{6}{20} + \frac{6}{20} \\
&= \frac{12}{20} \\
&= \frac{3}{5}
\end{aligned}$$

e.2)

$$\begin{aligned}
P(L) &= P(B \cap B) + P(R \cap R) \\
&= \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} + \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} \\
&= \frac{2}{20} + \frac{6}{20} \\
&= \frac{8}{20} \\
&= \frac{2}{5}
\end{aligned}$$

Dette kunne vi også løst med den komplementære sannsynligheten til forrige oppgave, nemlig at

$$\begin{aligned}
P(L) &= 1 - P(B \cap R) \\
&= 1 - \frac{3}{5} \\
&= \frac{2}{5}
\end{aligned}$$

f.1)

Vi skal skrive tre uttrykk så enkelt som mulig.

$$
\begin{aligned}
\frac{x}{x+2}+\frac{4x}{x^2-4} &= \frac{x\cdot\left(x^2-4\right)+4x\cdot(x+2)}{(x+2)\cdot(x^2-4)} \\
&= \frac{x\cdot(x+2)(x-2)+4x\cdot(x+2)}{(x+2)\cdot(x+2)\cdot(x-2)} \\
&= \frac{x\cdot(x-2)+4x}{(x+2)(x-2)} \\
&= \frac{x^2+2x}{x^2-4} \\
&= \frac{x(x+2)}{(x+2)(x-4)} \\
&= \frac{x}{x-4}
\end{aligned}
$$

f.2)

$$
\begin{aligned}
\frac{\left(a^2\cdot b\right)^3\cdot a^{-2}}{b^2\cdot a^{-3}} &= \frac{a^{2\cdot 3}\cdot b^3\cdot a^{-2}}{b^2\cdot a^{-3}} \\
&= \frac{a^{6-2+3}\cdot b^{3-2}}{1} \\
&= a^7\cdot b
\end{aligned}
$$

f.3)

$$
\begin{aligned}
\lg\left(a^2b\right)-2\lg\left(\frac{a}{b}\right) &= \lg\left(a^2b\right)-\lg\left(\frac{a^2}{b^2}\right) \\
&= \lg\left(\frac{a^2b}{\frac{a^2}{b^2}}\right) \\
&= \lg\left(a^2b\cdot\frac{b^2}{a^2}\right) \\
&= \lg\left(b^3\right) \\
&= 3\lg b
\end{aligned}
$$

g.1)

Vi deriverer

$$\begin{aligned} f(x) &= x^3 - 3x^2 + 2 \\ f'(x) &= 3x^2 - 3 \cdot 2x + 0 \\ &= 3x^2 - 6x \end{aligned}$$

så

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0 \\ 3x^2 - 6x &= 0 \\ 3x(x-2) &= 0 \\ x &= 0 \qquad \vee \qquad x = 2 \end{aligned}$$

dermed

$$f(0) = 2$$
$$f(2) = 2^3 - 3 \cdot (2)^2 + 2 = 8 - 12 + 2 = -2$$

vi har altså funnet ekstremalpunktene

$$T(0,2) \qquad\qquad B(2,-2)$$

g.2)

Setter

$$\begin{aligned} f'(x) &= 9 \\ 3x^2 - 6x &= 9 \\ 3x^2 - 6x - 9 &= 0 \\ x^2 - 2x - 3 &= 0 \\ x &= \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)}}{2 \cdot 1} \\ &= \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{2} \\ &= \frac{2 \pm 4}{2} \\ &= 3 \qquad \vee \qquad = -1 \end{aligned}$$

og dermed

$$f(3) = (3)^3 - 3 \cdot (3)^2 + 2 = 27 - 3 \cdot 9 + 2 = 2$$
$$f(-1) = (-1)^3 - 3 \cdot (-1)^2 + 2 = -1 - 3 \cdot 1 + 2 = -2$$

den deriverte er lik 9 i punktene

$$P_1(3,2) \qquad\qquad P_2(-1,-2)$$

oppgave 2

a)

Vi kaller X: 'Antall blinkskudd Knut klarer'

$$P(X=10)=(0,70)^{10}\approx 0,028$$

Jeg bruker binomisk sannsynlighetsfordeling, for enten så treffer Knut blinken, eller så gjør han det ikke. Videre forutsetter vi at sannsynligheten for et blinkskudd er lik hele tiden.

b)

$$P(X\leq 8)=\sum_{i=0}^{8}\binom{10}{i}\cdot(0,70)^{i}\cdot(0,30)^{10-i}\approx 0,851$$

c)

$$P(X\geq 7)=\sum_{i=7}^{10}\cdot(0,70)^{i}\cdot(0,30)^{10-i}\approx 0,650$$

Knut er en rimelig god skytter!

d)

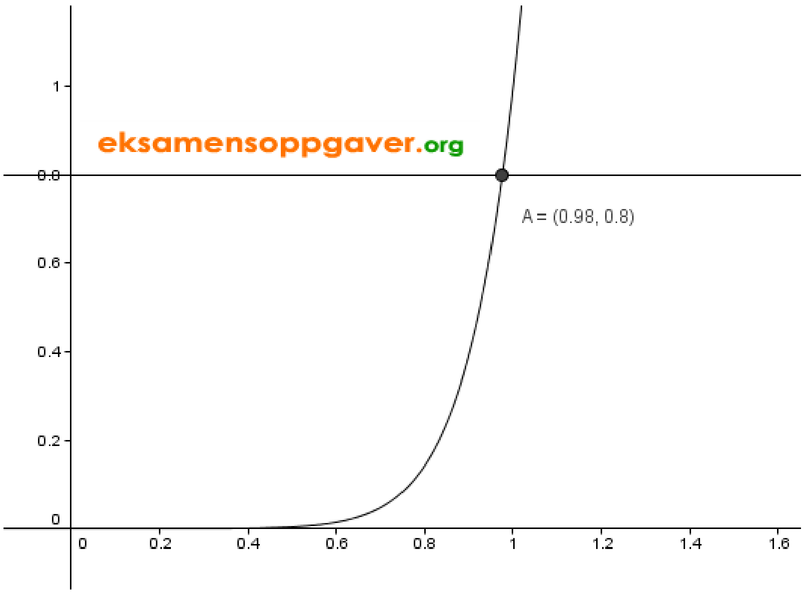
Vi kaller den ukjente sannsynligheten for p og setter opp følgende likning;

$$\sum_{i=7}^{10} \binom{10}{i} \cdot (p)^i \cdot (1-p)^{10-i} = 0,80$$

Hvilket er

$$p^7 \cdot (1-p)^3 + p^8 \cdot (1-p)^2 + p^9 \cdot (1-p) + p^{10} = 0,80$$

Vi plotter inn venstre- og høyresiden i likningen ovenfor på kalkulatoren, da ser vi at skjæringspunktet mellom de to blir ved hele $p = 0,98$. - På tide å trene Knutebissen!



oppgave 3 - alternativ I

a)

Vi ser at

$$f'(x) > 0 \qquad x \in \langle 1, 3 \rangle$$

dermed vokser f i dette intervallet. Videre ser vi at

$$f'(x) < 0 \qquad x \in \langle \leftarrow, 1 \rangle \cup \langle 3, \rightarrow \rangle$$

dermed avtar f i disse intervallene.

b)

Vi ser at

$$f'(x) = 0 \qquad x = \{1, 3\}$$

og følgelig er dette førstekoordinatene til ekstremalpunktene på grafen til f. I tillegg ser vi at

$$f'(x) = 1 \qquad x = 2$$

hvilket er toppunktet til den deriverte. Det indikerer at vi finner et vendepunkt på grafen til f i det punktet, ergo er grafen til f brattest i $(2, f(2))$

c)

Vi vet at en andregradsfunksjon på generell form skrives

$$g(x) = ax^2 + bx + c$$

og dersom nullpunktene, x_1 og x_2 er kjent, så kan vi skrive

$$g(x) = (x - x_1)(x - x_2)$$

dermed

$$f'(x) = (x - 1)(x - 3)$$

og til slutt

$$f'(x) = x^2 - 4x + 3$$

d)

Vi setter den deriverte lik -1 og løser med hensyn på x.

$$
\begin{aligned}
x^2 - 4x + 3 &= -1 \\
x^2 - 4x + 4 &= 0 \\
x &= \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 4}}{2 \cdot 1} \\
&= \frac{4 \pm \sqrt{16 - 16}}{2} \\
&= 2
\end{aligned}
$$

Altså skjer dette kun i ett punkt, nemlig når $x = 2$

e)

Finner heller funksjonsuttrykket til en potensiellt funksjonsuttrykk for f ved å integrere den deriverte.

$$
\begin{aligned}
\int x^2 - 4x + 3\,dx &= \frac{1}{3}x^3 - 4 \cdot \frac{1}{2}x^2 + 3x \\
&= \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x + C
\end{aligned}
$$

Ser vi vekk fra integrasjonskonstanten, så har vi at

$$
f(x) = \frac{1}{3}x^3 - 2x^2 + 3x
$$

oppgave 3 - alternativ II

a)

Vi setter

$$a = \frac{\Delta f}{\Delta x} = \frac{460 - 418}{15 - 5} = \frac{42}{10} = 4,2$$

dette tallet forteller oss den gjennomsnittlige økningen i antall registrerte personbiler per 1000 innbyggere per år fra 1990 til 2000.

b)

Plotter inn verdiene fra tabellen ovenfor under 'STAT' på min Casio fx-9750G Plus kælkis. Den spytter ut at følgende funksjon passer godt med dataene;

$$f(x) = 0,274x^2 - 1,486x + 417$$

(Koeffesientene er rundet av til tre desimaler, mens konstanten er rundet av til nærmeste heltall).

c)

d)

Deriverer

$$\begin{aligned} f'(x) &= 0,274 \cdot \left(x^2\right)' - 1,486 \cdot (x)' + (417)' \\ &= 0,274 \cdot 2 \cdot x - 1,486 \cdot 1 + 0 \\ &= 0,548x - 1,486 \end{aligned}$$

i år 2000 er $x = 15$, så;

$$f'(15) = 0,548 \cdot (15) - 1,486 = 6,734$$

e)

Antall registrerte personbiler blir da anslått til

$$\left(f'(15) + 460\right) \cdot \frac{4500000}{1000} = (6,734 + 460) \cdot 4500 = 2100303$$

oppgave 4

a)

Vi ser på Kari, Arne og Harald som ei produksjonslinje. Og ut fra opplysningene, ser vi at det vil bli produsert

$$1. \qquad x \geq 0 \quad \text{og} \quad y \geq 0$$

Videre ser vi at Kari vil klare å plukke;

$$K = \frac{6 \cdot 60}{20} = 18$$

kasser med epler eller pærer. Dermed vil antall kasser med pærer være

$$2. \qquad y \leq -x + 18$$

Arne vil klare å sortere

$$3. \qquad y \leq -\frac{12}{24} + \frac{5 \cdot 60}{24}$$

$$\Updownarrow$$

$$y \leq -\frac{1}{2} + 12,5$$

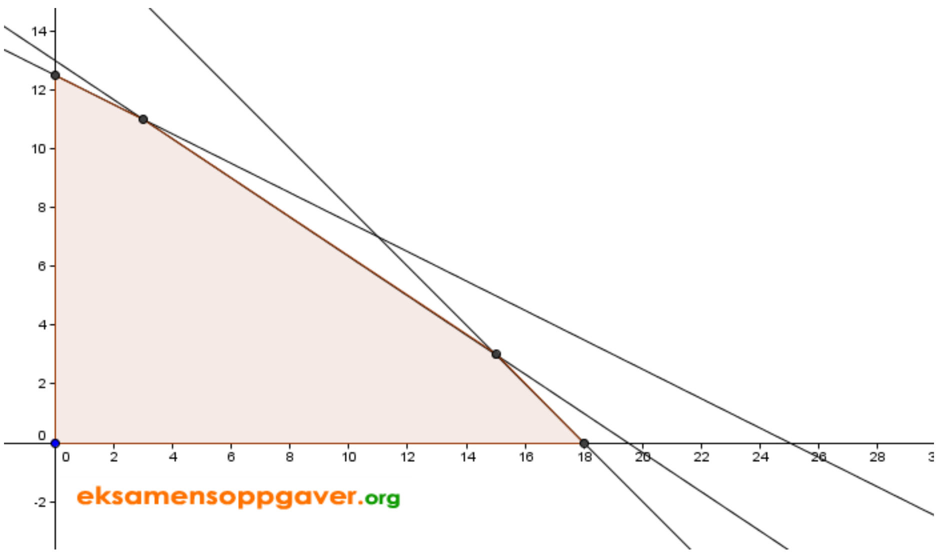
kasser og til slutt, Harald som klarer å pakke

$$4. \qquad y \leq -\frac{20}{30}x + \frac{6,5 \cdot 60}{30}$$

$$\Updownarrow$$

$$y \leq -\frac{2}{3} + 13$$

b)



c)

Kasser kan selvsagt bare produseres i heltallig antall. Videre har jeg laget en dynamisk fil med glider, som viser de forskjellige punktene hvor både x og y er heltall, og innenfor ulikhetene. Vi finner

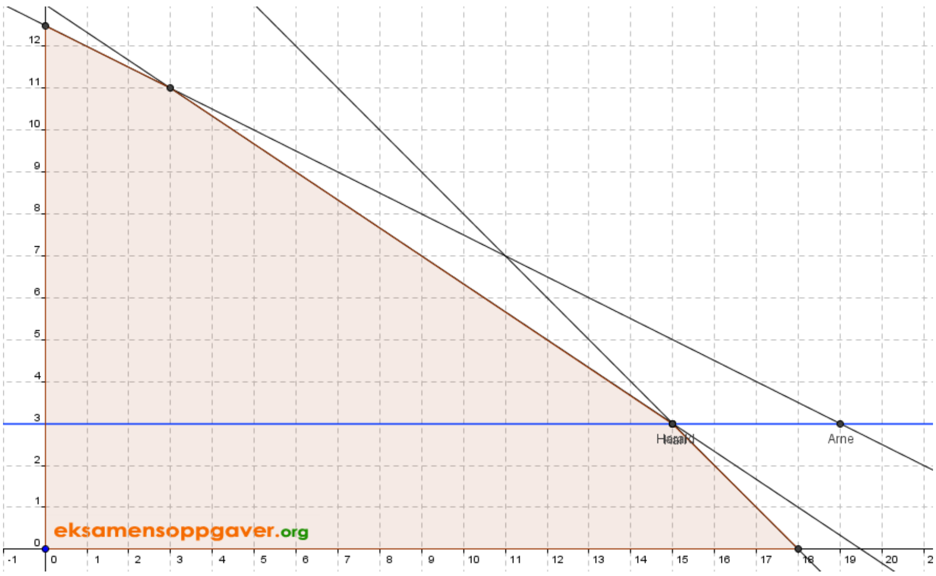
$P_1(1,12)$ $P_2(3,11)$ $P_3(9,7)$ $P_4(12,5)$ $P_5(15,3)$ $P_6(16,2)$ $P_7(17,1)$

Hvilket gir oss samlet lønn lik

$$\begin{aligned}
P_x &= 150x + 200y \\
P_1 &= 150 + 200 \cdot 12 = 2550 \\
P_2 &= 150 \cdot 3 + 200 \cdot 11 = 2650 \\
P_3 &= 150 \cdot 9 + 200 \cdot 7 = 2750 \\
P_4 &= 150 \cdot 12 + 200 \cdot 5 = 2800 \\
P_5 &= 150 \cdot 15 + 200 \cdot 3 = 2850 \\
P_6 &= 150 \cdot 16 + 200 \cdot 2 = 2800 \\
P_7 &= 150 \cdot 17 + 200 = 2750
\end{aligned}$$

Høyest mulig inntekt skjer altså i $P_5(15,3)$ da er inntekten 2850 kr.

d)



Fra den dynamiske funksjonen jeg har laget, ser vi at det er Arne. Videre ser vi at kapasiteten hans i dette tilfellet er

$$Arne(19, 3)$$

hvilket gir differansen

$$D(4, 0)$$

Altså ville han rukket å sortere 4 eplekasser ekstra, hvilket er

$$4 \cdot 12 = 48$$

minutter med ledig tid.

Dersom du er interessert, finner du flere løsningsforslag på eksamensoppgaver.org

SLUTT