Løsningsforslag
AA6524/AA6526 Matematikk 3MX
Elever/Privatister - 7. desember 2005

Om løsningsforslaget

Løsningsforslaget for matematikk eksamen i 3MX er gratis, og det er lastet ned på eksamensoppgaver.org. Løsningen er myntet på elever og privatister som vil forbrede seg til eksamen i matematikk. Lærere må gjerne bruke løsningsforslaget i undervisningsøyemed, men virksomheter har ingen rett til å anvende dokumentet.

Løsningsforslagene skal utelukkende distribueres fra nettstedet eksamensoppgaver.org, da det er viktig å kunne føye til og rette eventuelle feil i ettertid. På den måten vil alle som ønsker det, til enhver tid finne det siste oppdaterte verket. eksamensoppgaver.org ønsker videre at flest mulig skal få vite om eksamensløsningene, slik at det finnes et eget nettsted hvor man kan tilegne seg dette gratis.

Dersom du sitter på ressurser du har mulighet til å dele med deg, eller ønsker å bidra på annen måte, håper eksamensoppgaver.org på å høre fra deg.

Innholdsfortegnelse

oppgave 1

a.1)

Vi deriverer denne litt 'grundig'

$$\begin{aligned}
f(x) &= 3 \cdot \tan 2x \\
&= 3 \cdot \frac{\sin 2x}{\cos 2x} \\
f'(x) &= 3 \cdot \left(\frac{\sin 2x}{\cos 2x}\right)' \\
&= 3 \cdot \frac{(\sin 2x)' \cdot \cos 2x - \sin 2x \cdot (\cos 2x)'}{\cos^2 2x} \\
&= 3 \cdot \frac{(\sin 2x)' \cdot (2x)' \cdot \cos 2x - \sin 2x \cdot (\cos 2x)' \cdot (2x)'}{\cos^2 2x} \\
&= 3 \cdot \frac{\cos 2x \cdot 2 \cdot \cos 2x - \sin 2x \cdot (-\sin 2x) \cdot 2}{\cos^2 2x} \\
&= 3 \cdot \frac{2\cos^2 2x + 2\sin^2 2x}{\cos^2 2x} \\
&= 6 \cdot \left(\frac{\cos^2 2x}{\cos^2 2x} + \frac{\sin^2 2x}{\cos^2 2x}\right) \\
&= 6 \cdot \left(1 + \tan^2 2x\right)
\end{aligned}$$

a.2)

$$\begin{aligned}
g(x) &= x^2 \cdot \sin x \\
g'(x) &= \left(x^2\right)' \cdot \sin x + x^2 \cdot (\sin x)' \\
&= 2x \cdot \sin x + x^2 \cdot \cos x \\
&= x \cdot (2 \sin x + x \cos x)
\end{aligned}$$

b.1)

Her skal vi integrere litt

$$\int x \cdot e^{2x}\,dx$$

Vi bruker delvis integrasjon og setter

$$u' = e^{2x} \qquad u = \frac{1}{2}e^{2x}$$

og

$$v' = 1 \qquad v = x$$

inn i

$$\int u' \cdot v = u \cdot v - \int u \cdot v'$$

så

$$\begin{aligned}
\int x \cdot e^{2x}\,dx &= x \cdot \frac{1}{2}e^{2x} - \int 1 \cdot \frac{1}{2}e^{2x}\,dx \\
&= \frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{2} \cdot \int e^{2x}\,dx \\
&= \frac{1}{2}xe^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x} \\
&= (2x-1) \cdot \frac{1}{4}e^{2x} + C
\end{aligned}$$

b.2)

Vi er gitt formelen

$$\int (\sin x)^n\,dx = -\frac{1}{n}\cos x \cdot (\sin x)^{n-1} + \frac{n-1}{n} \cdot \int (\sin x)^{n-2}\,dx$$

og skal bruke dette til å integrere

$$\int (\sin x)^3\,dx$$

så, da setter vi inn 3 for n og løser

$$\begin{aligned}
\int (\sin x)^3\,dx &= -\frac{1}{3}\cos x \cdot (\sin x)^{3-1} + \frac{3-1}{3} \cdot \int (\sin x)^{3-2}\,dx \\
&= -\frac{1}{3}\cos x \cdot \sin^2 x + \frac{2}{3} \cdot \int \sin x\,dx \\
&= -\frac{1}{3}\cos x \cdot \sin^2 x + \frac{2}{3} \cdot (-\cos x) \\
&= -\frac{1}{3}\cos x \cdot \sin^2 x - \frac{2}{3}\cos x \\
&= -\frac{1}{3}\cos x \cdot \left(\sin^2 x + 2\right) + C
\end{aligned}$$

c)

$$
\begin{aligned}
3\sin x - 2\cos x &= 2 \qquad\qquad x \in [0, 2\pi\rangle \\
\sin\left(x + \arctan\left(\frac{-2}{3}\right)\right) &= \frac{2}{\sqrt{3^2+(-2)^2}} \\
\sin\left(x - \arctan\left(\frac{2}{3}\right)\right) &= \frac{2}{\sqrt{13}} \cdot \frac{\sqrt{13}}{\sqrt{13}} \\
\sin(x - 0,5880) &= \frac{2\sqrt{13}}{13} \\
x - 0,5880 &= \arcsin\left(\frac{2\sqrt{13}}{13}\right) + 2k\pi \qquad\qquad k \in \mathbb{Z}
\end{aligned}
$$

$$x \approx 0,5880 + 0,5880 + 2k\pi \qquad \vee \qquad x \approx \pi - 0,5880 + 0,5880 + 2k\pi$$

$$x = 1,176 + 2k\pi \qquad \vee \qquad x = \pi + 2k\pi$$

$$k = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad x = \{1,176, \pi\}$$

d.1)

Vi ser på dette som ei geometrisk rekke, der hun setter inn 20 000 kr 21 ganger, slik

$$20000 + 20000 \cdot 1,04^2 + 20000 \cdot 1,04^3 + \ldots + 20000 \cdot 1,04^{21}$$

dette summerer vi opp, slik

$$
\begin{aligned}
S_{21} &= \frac{20000 \cdot \left(1,04^{21} - 1\right)}{1,04 - 1} \\
&= \frac{20000 \cdot \left(1,04^{21} - 1\right)}{0,04} \\
&\approx 639384 \text{ kr}
\end{aligned}
$$

d.2)

Vi lar beløpet være x kr, da får vi

$$\frac{x}{1,04} + \frac{x}{1,04^2} + \ldots + \frac{x}{1,04^8}$$

Dermed summerer vi rekka baklengs, slik at

$$
\begin{aligned}
\frac{\frac{x}{1,04^8} \cdot \left(1,04^8 - 1\right)}{1,04 - 1} &= 639384 \\
x &= \frac{639484 \cdot 0,04 \cdot 1,04^8}{1,04^8 - 1} \\
x &\approx 94966 \text{ kr}
\end{aligned}
$$

e)

Vi skal skrive så enkelt som mulig

$$\frac{\sin x}{\sin(x+60^\circ)-\sin(x-60^\circ)} =$$

$$\frac{\sin x}{\sin x\cdot\cos(60^\circ)+\cos x\cdot\sin(60^\circ)-(\sin x\cdot\cos(60^\circ)-\cos x\cdot\sin(60^\circ))} =$$

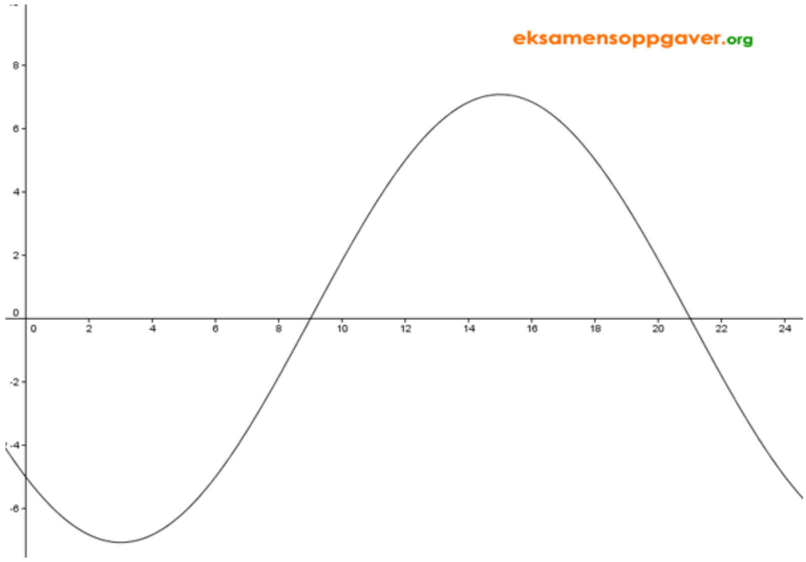
$$\frac{\sin x}{\sin x\cdot\frac{1}{2}+\cos x\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\sin x\cdot\frac{1}{2}+\cos x\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}} =$$

$$\frac{\sin x}{\sqrt{3}\cdot\cos x} =$$

$$\frac{\sqrt{3}}{3}\tan x$$

oppgave 2

a)



b)

$$-5\sin(0,2618x) - 5\cos(0,2618x) = 0 \qquad x \in [0, 24\rangle$$

$$-5\sin(0,2618x) = 5\cos(0,2618x)$$

forutsetter at $\cos(0,2618x) \neq 0$

$$\frac{-5\sin(0,2618x)}{5\cos(0,2618x)} = \frac{5\cos(0,2618x)}{5\cos(0,2618x)}$$

$$-\tan(0,2618x) = 1$$

$$0,2618x = -\arctan(1) + k\pi \qquad k \in \mathbb{Z}$$

$$0,2618x = -\frac{\pi}{4} + k\pi \qquad \vee \qquad 0,2618x = \pi - \frac{\pi}{4} + k\pi$$

$$x = \frac{\frac{7\pi}{4} + k\pi}{0,2618} \qquad \vee \qquad x = \frac{\frac{3\pi}{4} + k\pi}{0,2618}$$

som gir følgende tilnærmede verdier i den gitte definisjonsmengden

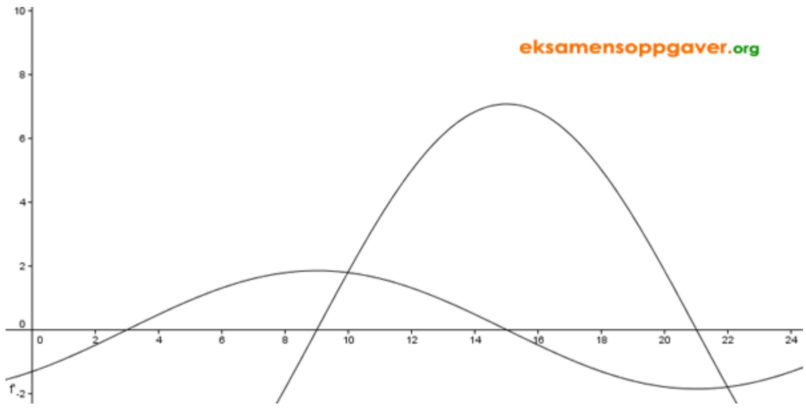
$$x \approx \{9,\ 21\}$$

c)

Deriverer f

$$
\begin{aligned}
f(x) &= -5\sin(0,2618x) - 5\cos(0,2618x) \\
f'(x) &= -5\cdot(\sin(0,2618x))'\cdot(0,2618x)' - 5\cdot(\cos(0,2618x))'\cdot(0,2618x)' \\
&= -5\cdot 0,2618\cos(0,2618x) - 5\cdot(-\sin(0,2618x)\cdot 0,2618 \\
&= -1,309\cos(0,2618x) + 1,309\sin(0,2618x)
\end{aligned}
$$

og her er grafen til den deriverte og f i samme koordinatsystem.



d)

Der f' er lik null, finner vi ekstremalpunktene til f. Følgelig må man observere grafen til f for å se om man har funnet et topp- eller bunnpunkt.

Vi ser at f har et bunnpunkt i circa $E_1(3,-7,1)$ og toppunkt i $E_2(15,7,1)$

e)

$$g(x) = f(x) + 19$$

og med opplysningene vi fant i d, så ser vi at

$$g(3) = -7,1 + 19 = 11,9°\text{C}$$

og

$$g(15) = 7,1 + 19 = 26,1°\text{C}$$

Altså kaldest klokken 03:00 og varmest klokken 15:00

oppgave 3

a)

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 2z = 3$$

vi bruker fullstendige kvadrater

$$(x-1)^2 = x^2 - 2x + 1$$

$$(y-2)^2 = y^2 - 4y + 4$$

$$(z+1)^2 = z^2 + 2z + 1$$

deretter legger vi til det samme på begge sider, da får vi

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 3 + 1 + 4 + 1$$

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 3^2$$

og siden

$$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 = r^2$$

beskriver ei kuleflate, så mener jeg at dette er tilfredstillende for å vise at vi har med ei kuleflate å gjøre.

b)

Vi fant at

$$(x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+1)^2 = 3^2$$

fra dette ser vi at sentrum er $S(1, 2, -1)$ og radius er $r = 3$.

c)

Punktet $A(2,0,1)$ ligger på kuleflaten dersom de oppfyller likningen, vi setter inn for x, y og z for å se

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 4y + 2z = 3$$

$$(2)^2 + (0)^2 + (1)^2 - 2 \cdot (2) - 4 \cdot (0) + 2 \cdot (1) = 3$$

$$4 + 1 - 4 + 2 = 4$$

$$3 = 3$$

Ja, A oppfyller likningen, punktet ligger på kuleflaten.

d)

Vi er gitt $A(2,0,1)$ og vet allerede at sentrum ligger i $S(1,2,-1)$, dermed lager vi en retningsvektor

$$\overrightarrow{AS} = [1-2, 2-0, -1-1] = [-1, 2, -2]$$

videre vet vi at det er like langt fra S til A som fra S til B, dermed kan vi bruke at

$$\overrightarrow{OS} + \overrightarrow{AS} = [1, 2, -1] + [-1, 2, -2] = [0, 4, -3]$$

altså har vi funnet $B(0, 4, -1)$.

oppgave 4 - alternativ I

a)

Last ned det dynamiske geogebra filvedlegget for denne oppgaven. Der er det glidere du kan naske og dra i, for å se hvordan grafen påvirkes ved endringer i a, b og θ.

b)

Tar dette på kalkulatoren;

$$A = \frac{1}{2} \cdot 2^2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos\theta)^2 \, d\theta$$

$$A = 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos\theta)^2 \; d\theta \approx 17,42$$

c)

Siden denne kurven kan beskriver i sin helhet for

$$\theta \in [0, 2\pi\rangle$$

så vet vi at baksiden fremkommer i intervallet

$$\theta \in \left[\frac{\pi}{2}, \frac{3}{2}\pi\right]$$

Arealet er symmetrisk om førsteaksksen (vi endrer øvre grense ved å multiplisere både integralet og grensen med 2 i andre ledd).

$$\begin{aligned}
A = &= \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} (2(1+\cos\theta))^2 \; d\theta \\
&= \frac{1}{2}\cdot 2^2 \cdot 2\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos^2\theta + 2\cos\theta + 1 \, d\theta \\
&= 4\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \cos^2\theta + 2\cos\theta + 1 \, d\theta \\
&= 4\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos(2\theta) + 2\cos\theta + 1 \, d\theta \\
&= 4\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{1}{2}\cos(2\theta) + 2\cos\theta + \frac{3}{2} \, d\theta
\end{aligned}$$

så løser vi integralet

$$\begin{aligned}
A = 4\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{1}{2}\cos(2\theta) + 2\cos\theta + \frac{3}{2} \, d\theta &= 4\left[\frac{1}{4}\sin(2\theta) + 2\sin\theta + \frac{3}{2}\theta\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \\
&= [\sin(2\theta) + 8\sin\theta + 6\theta]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \\
&= 6\pi - (8 + 3\pi) \\
&= 3\pi - 8 \\
&\approx 1,42
\end{aligned}$$

oppgave 4 - alternativ II

a)

Vi er gitt vektorfunksjonen

$$\vec{r}(t) = [0,85\cos t,\ 0,85\sin t,\ 0,54t + 1,1]$$

Vi ser av x- og y-komponenten til funksjonen at

$$[0,85\cos t,\ 0,85\sin t] \quad \Rightarrow \quad 0,85 \cdot [\cos t,\ \sin t]$$

der $\cos t$ og $\sin t$ etter definisjonen av enhetssirkelen danner en sirkel med $r = 1$, dog blir begge komponentene multiplisert med $0,85$ og følgelig blir også det radius.

Når det gjelder høyden i trappen, så beskrives denne av z-komponenten, altså

$$0,54t + 1,1$$

ved å observere at definisjonsmengden er

$$t \in [0,5]$$

ser vi ved innsetting at

$$0,54 \cdot 5 + 1,1 = 2,70$$

altså er trappen $2,70$ meter høy.

b)

Vi deriverer og definerer integralet. Grensene er forøvrig $t_1 = 0, t_2 = 5$

$$\begin{aligned}
\vec{r}\,'(t) &= \left[0,85(\cos t)',\ 0,85(\sin t)',\ 0,54(t)' + (1,1)'\right] \\
&= [-0,85\sin t,\ 0,85\cos t,\ 0,54]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
s &= \int_0^5 \sqrt{(-0,85\sin t)^2 + (0,85\cos t)^2 + (0,54)^2}\, dt \\
&= \int_0^5 \sqrt{0,85^2 \cdot \left(\sin^2 t + \cos^2 t\right) + 0,54^2}\, dt \\
&= \int_0^5 \sqrt{0,85^2 + 0,54^2}\, dt \\
&= \int_0^5 \sqrt{1,0141}\, dt \\
&= \sqrt{1,0141}t \Big|_0^5 \\
&= 5\sqrt{1,0141} \\
&\approx 5,04 \text{ m}
\end{aligned}$$

c)

Jeg fant et uttrykk for den deriverte i den forrige oppgaven. Det måtte man jo for å kunne finne buelengden. - Antar at dette var en glipp fra eksamensforfatterens side.

Uansett, vi har

$$\vec{r}'(t) = [-0,85\sin t,\ 0,85\cos t,\ 0,54]$$

og z-komponenten kaller vi

$$\vec{z} = [0,0,1]$$

dernest vil vi finne vinkelen.

$$\begin{aligned}
\cos\theta &= \frac{\vec{r}'(t)\cdot\vec{z}}{|\vec{r}'(t)|\cdot|\vec{z}|} \\
&= \frac{[-0,85\sin t,\ 0,85\cos t,\ 0,54]\cdot[0,0,1]}{\sqrt{0,85^2+0,54^2}\cdot\sqrt{1}} \\
&= \frac{0,54}{1,0141} \\
\theta &= \arccos\left(\frac{0,54}{\sqrt{1,0141}}\right) \\
&\approx 57,6^\circ
\end{aligned}$$

Dette kan man også komme fremt til dersom man tenker seg at man strekker rekkverket ut, videre vet man at høyden er $2,70$. Da får man en trekant der

$$\cos\theta = \frac{2,70}{5,04}$$

$$\theta = 57,6^\circ$$

oppgave 5

a)

Vi er gitt at

$$p = 0,01$$

og definerer den stokastiske variabelen Q: 'Antall personer som ikke har Q'.

$$P(Q = 20) = (1 - 0,01)^{20} = (0,99)^{20} \approx 0,818$$

b)

I deloppgave a fant vi at sannsynligheten for at absolutt alle var friske var lik $0,818$. Videre blir da sannsyligheten for **minst** én syk den komplementære sannsynligheten, nemlig;

$$1 - 0,818 = 0,182$$

og følgelig må de 21 testene tas, så da får vi

x	1	21
$P(X = x)$	$0,818$	$0,182$

c)

$$\mu_X = 1 \cdot 0,818 + 21 \cdot 0,182 = 4,64$$

og

$$\sigma_X = \sqrt{(1 - 4,64)^2 \cdot 0,818 + (21 - 4,64)^2 \cdot 0,182} = \sqrt{59,5504} \approx 7,717$$

d)

Det er 20 prøver, hvorav hver prøve koster 20 kroner å splitte i 2, altså får vi

$$20^2 = 400$$

videre koster det 50 kroner å analysere hver prøve, og vi får

$$Y = 400 + 50X$$

Vi finner forventningsverdien for Y

$$\mu_Y = 400 + 50 \cdot \mu_X = 400 + 50 \cdot 4,64 = 632$$

standardavviket blir

$$\sigma_Y = 50 \cdot \sigma_X = 50 \cdot 7,717 = 385,85$$

e)

Vi sjekker først hva hver enkelt test ville koste;

$$20 \cdot 50 = 1000 \text{ kr}$$

så ser vi at

$$\mu_Y = 632 \text{ kr}$$

er lavere, og dermed har vi konstatert at de burde holde fast på metoden sin.

f)

Vi lar

$$Z = Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_{250}$$

dermed får vi også at

$$\mu_Z = 250 \cdot \mu_Y = 250 \cdot 632 = 158000$$

videre, så finner vi

$$\sigma_Z = \sqrt{250} \cdot \sigma_Y = \sqrt{250} \cdot 385,85 \approx 6100,82$$

Dersom de skulle brukt den andre metoden, så ville kostnaden blitt

$$250 \cdot 20 \cdot 50 = 250000$$

for at de skal spare 100 000 kroner, må derfor

$$250000 - 158000 = 92000$$

$$P(Z \leq 150000) = \Phi\left(\frac{150000 - 158000}{6100,82}\right) \approx \Phi(-1,31)$$

leser av tabell, og finner

$$P(Z \leq 150000) = 0,0951$$

Dersom du er interessert, finner du flere løsningsforslag på eksamensoppgaver.org

SLUTT