

Eksamen

Fag: AA6524 Matematikk 3MX

Eksamensdato: 3. juni 2005

Vidaregående kurs II /Videregående kurs II

Studieretning: Allmenne, økonomiske og administrative fag

Elevar / Elever

Oppgåva ligg føre på begge målformer, først nynorsk, deretter bokmål. /
Oppgaven foreligger på begge målformer, først nynorsk, deretter bokmål.

OPPGAVE 1

a) Deriver funksjonene:

1) $f(x) = 3 \tan(2x)$

2) $g(x) = x^2 \cdot \sin x$

b) Bestem integralene:

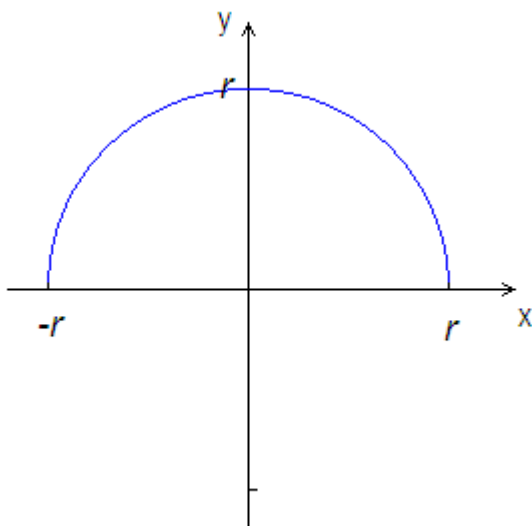
1) $\int x \cdot \cos x \, dx$

2) $\int \frac{2x}{x^2 + 3} \, dx$

c) Løs ligningen ved regning:

$$2 \sin x + 3 \cos x = 2 \quad x \in [0, 2\pi)$$

d)



En halvsirkel med radius r og sentrum i origo er gitt ved

$$f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$$

Vi roterer halvsirkelen 360° om x -aksen.

Bruk integrasjon til å finne volumet av omdreiningslegemet uttrykt ved r .
Kommenter svaret.

e) Vi har gitt ligningen

$$x^2 + y^2 + 6x - 12y + 29 = 0$$

- 1) Vis ved regning at dette er ligningen for en sirkel med radius 4 og sentrum i $(-3, 6)$.
- 2) Vis at denne sirkelen kan skrives som vektorfunksjonen

$$\vec{r}(t) = [-3 + 4 \cos t, 6 + 4 \sin t] \quad t \in [0, 2\pi)$$

- 3) Bruk formelen for buelengde, og finn ved regning omkretsen av sirkelen. Kommenter svaret.

OPPGAVE 2

Funksjonen f er gitt ved $f(x) = 3 \sin(6x)$

- a) Hva er amplituden og perioden til f ?

I resten av denne oppgaven vil vi studere funksjonen g gitt ved

$$g(x) = 3e^{-x} \cdot \sin(6x) \quad \text{for } x \in \langle 0, 2 \rangle$$

- b) Tegn grafen til g .
- c) Finn $g'(x)$.
- d) Finn ved regning koordinatene til topp- og bunnpunktene på grafen til g .
- e) Skisser grafene til $h(x) = -3e^{-x}$ og $i(x) = 3e^{-x}$ i samme koordinatsystem som g . Forklar hvordan du av funksjonsuttrykket til $g(x)$ ser at grafen til g må ligge mellom grafene til h og i .

OPPGAVE 3

Anne vil kjøpe nytt fjernsynsapparat. Hun har valget mellom tre ulike betalingsmåter:

- 1) Hun betaler 24 000 kr kontant.
- 2) Hun betaler 2 500 kr per måned i 12 måneder. Det første beløpet skal betales straks.
- 3) Hun betaler 10 000 kr kontant og deretter 800 kr per måned i 24 måneder. Det første beløpet skal betales om en måned.

Avgjør hvilken av disse betalingsmåtene som vil bli dyrest for Anne dersom renta er 2,0 % per måned.

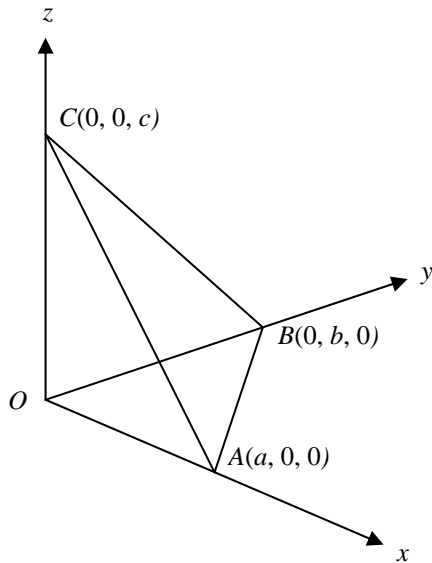


OPPGAVE 4

Du skal besvare enten alternativ I eller alternativ II.
De to alternativene er likeverdige ved vurderingen.

(Dersom besvarelsen inneholder deler av begge,
vil bare det du har skrevet på alternativ I, bli vurdert.)

Alternativ I

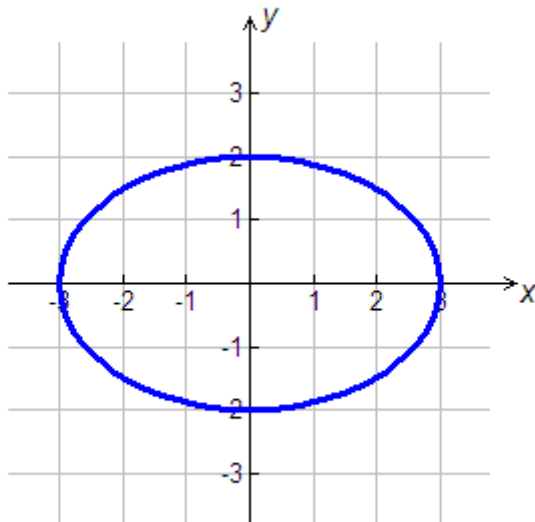


- a) Arealet av trekanten OAB på figuren ovenfor $F_1 = \frac{1}{2}ab$. Finn arealene F_2 og F_3 av trekantene OAC og OBC .
- b) Skriv opp koordinatene til vektorene \overrightarrow{AB} og \overrightarrow{AC} .
- c) Vis at $\vec{n} = [bc, ac, ab]$ er en normalvektor til planet som går gjennom punktene A , B og C .

Det kan vises at arealet F_4 av trekanten ABC er gitt ved $F_4 = \frac{1}{2} |\vec{n}|$.

- d) Finn et uttrykk for F_4 .
- e) En sammenheng mellom de fire arealene kalles Pytagoras' arealsetning. Finn denne sammenhengen.

Alternativ II



En partikkel beveger seg langs en ellipse med store halvakse $a = 3$ og lille halvakse $b = 2$.

Posisjonen er gitt ved vektorfunksjonen

$$\vec{r}(t) = [3 \cos t, 2 \sin t] \text{ der } t \text{ er tida.}$$

Banefarten er gitt ved $v(t) = |\vec{v}(t)| = |\vec{r}'(t)|$.

- Finne et uttrykk for $v(t)$.
- Hvor på ellipsen er banefarten størst, og hvor er den minst?
- Bruk lommeregneren og formelen for buelengde til å finne omkretsen av ellipsen.

Den indiske matematikeren Ramanujan presenterte (1913–14) en tilnæringsformel for omkretsen p av en ellipse:

$$p \approx \pi(a+b) \left(1 + \frac{3h}{10 + \sqrt{4-3h}} \right) \quad \text{der } h = \left(\frac{a-b}{a+b} \right)^2$$

a og b er store og lille halvakse.

- Bruk Ramanujans formel, og finn p når $a = 3$ og $b = 2$. Sammenlign med svaret i c).
- Undersøk Ramanujans formel i det spesialtilfellet at ellipsen er en sirkel. Kommenter.

Visste du at

Srinivasa Ramanujan var en av Indias største matematiske genier. Han ble født i 1887 og døde av tuberkulose i 1920, bare 32 år gammel. Da Ramanujan var blitt syk, dro vennen Hardy for å besøke ham. Han visste ikke hva han skulle si innledningsvis, så han kommenterte nummeret på drosjen som brakte ham til sykehuset. "Det var nummer 1729 – et kjedelig tall", mente Hardy. Ramanujan kviknet til: "På ingen måte, Hardy, det jo det minste tallet som kan skrives som en sum av to kubikktall på to forskjellige måter: $1729 = 10^3 + 9^3 = 12^3 + 1^3$ ". Hardy sa at tallene var Ramanujans personlige venner!

Kilde: *Matematisk etymologi* av Ragnar Solvang

OPPGAVE 5

Idrettslaget Friskus har fått lov til å sette opp en spilleautomat hos den lokale kjøpmannen for å skaffe inntekter til barneidretten. Automaten gir gevinster på enten 0, 20, 50 eller 250 kroner.

Vi lar X stå for den gevinsten en spiller får utbetalt når han spiller én gang.

Sannsynlighetsfordelingen til X er gitt i tabellen

Gevinst k (kroner)	0	20	50	250
$P(X = k)$	$\frac{189}{256}$	$\frac{54}{256}$	$\frac{12}{256}$	$\frac{1}{256}$

a) Finn forventningsverdi og varians til X .

Innsatsen for å spille én gang på automaten er 10 kroner. Fortjenesten Y til idrettslaget i ett spill er da gitt ved $Y = 10 - X$.

b) Vis at Y har forventningsverdien 2,46 kroner og standardavviket 19,72 kroner.

Styret i Friskus regner med at det i løpet av ett år vil bli spilt 5000 ganger på automaten. I punktene c) og d) legger vi denne forutsetningen til grunn.

c) Hva er sannsynligheten for at toppgevinsten på 250 kroner vil bli utbetalt minst 25 ganger i løpet av ett år?

d) Hva er sannsynligheten for at den samlede fortjenesten til idrettslaget vil bli minst 15 000 kroner, det vil si i gjennomsnitt minst 3 kroner for hvert av de 5000 spillene?

Barneidretten i Friskus har et budsjett på 20 000 kroner for ett år.

e) Hvor mange ganger må det spilles i løpet av ett år, for at det skal være 90 % sannsynlig at inntektene fra automaten minst vil dekke utgiftene til barneidretten?