Utdanningsdirektoratet

Eksamen

29.05.2008

AA6524 Matematikk 3MX
Elevar/Elever

Nynorsk/Bokmål

Oppgave 1

a) Deriver funksjonen $f(x) = 3x \cdot \sin 2x$

b) Deriver funksjonen $g(x) = \tan^2 x$

c) Finn integralet $\int 2x \cdot e^{x^2}\, dx$

d) Løs likningen $1 + \cos 2x = \sin^2 2x$ ved regning.

e) Finn ved regning bunnpunktet på grafen til funksjonen $f(x) = \dfrac{x}{\ln x}$

f) En spesiell terning har 3 sider med én prikk, 2 sider med to prikker og 1 side med tre prikker.

   La X være antall prikker i et terningkast.

   1) Sett opp en sannsynlighetsfordeling for X. Bestem forventningsverdien til X.

   2) Bestem standardavviket til X.

Oppgave 2

En periodisk funksjon er gitt ved $f(x) = \cos^2 x$

a) Tegn grafen til f for x-verdier mellom 0 og 2π.

b) Bruk grafen og finn likevektslinja, amplituden og perioden for denne funksjonen.

c) Forklar at parameteren $\varphi = \frac{\pi}{2}$. Skriv $f(x)$ på formen

$$f(x) = A\sin\left(cx + \varphi\right) + d$$

d) Bruk blant annet formelen for $\sin(u+v)$ på uttrykket i c) og vis at dette gir det opprinnelige uttrykket.

Oppgave 3

Sannsynligheten for å overleve en spesiell type operasjon er antatt å være lik 0,9.

a) Hva er sannsynligheten for at nøyaktig 16 av 20 pasienter vil overleve denne operasjonen? Hva kalles sannsynlighetsfordelingen du bruker her? Hvilke forutsetninger ligger til grunn for at du kan bruke denne fordelingen?

Når vi ser på et tilstrekkelig stort antall pasienter, er denne fordelingen tilnærmet lik normalfordelingen. Vi ser nå på 200 pasienter.

b) Vis at $\mu = 180$ og $\sigma \approx 4,24$ for denne fordelingen.

c) Hva er sannsynligheten for at færre enn 168 av 200 pasienter vil overleve operasjonen?

d) Hva er sannsynligheten for at antall overlevende pasienter er mellom 168 og 186?

En kirurg stiller spørsmål ved om sannsynligheten for å overleve operasjonen er 0,9. Han bestemmer seg derfor for å gjøre en utvalgsundersøkelse for å sjekke om det stemmer. Årlig foretas det flere tusen slike operasjoner. Kirurgen ser på 90 tilfeldig valgte operasjoner av denne typen. Av disse var det 63 av pasientene som overlevde.

e) Finn et estimat for andelen som overlevde operasjonen. Regn ut standardfeilen.

f) Vi tenker oss at p er sannsynligheten for å overleve operasjonen. Sett opp et 95 % konfidensintervall for p. Hva kan du si om p etter at du har satt opp dette intervallet?

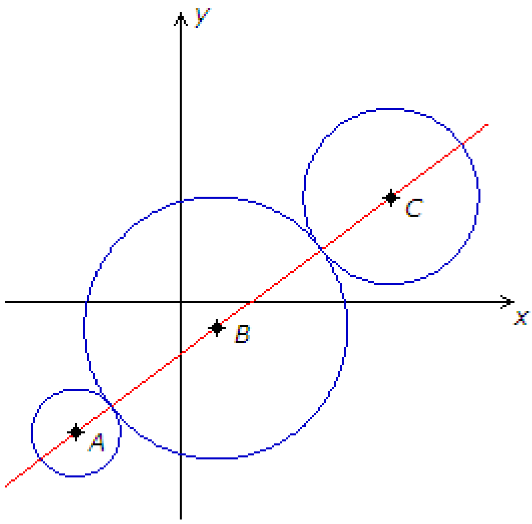
Oppgave 4

Du skal besvare enten alternativ I eller alternativ II.
De to alternativene er likeverdige ved vurderingen.

(Dersom besvarelsen inneholder deler av begge,
vil bare det du har skrevet på alternativ I, bli vurdert.)

Alternativ I

Sentrene A, B og C i de tre sirklene i figuren nedenfor ligger på en rett linje.



Likningene til de to ytterste sirklene er gitt ved

$$(x+12)^2+(y+15)^2=25 \qquad \text{og} \qquad (x-24)^2+(y-12)^2=100$$

a) Skriv ned koordinatene til sentrene A og C, og finn $\overrightarrow{AC}$ og $|\overrightarrow{AC}|$.

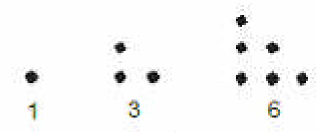
b) Hva er radien til den midterste sirkelen?

c) Finn likningen til den midterste sirkelen.

d) En rett linje går gjennom B og står vinkelrett på linja gjennom A og C. Finn skjæringspunktene mellom denne linja og den midterste sirkelen.

Alternativ II

Trekanttall kan illustreres som antall ”prikker” som danner en trekantfigur. Figur 1 viser de tre første trekanttallene a_1, a_2 og a_3.



Figur 1

Summen av trekanttallene danner rekka

$$1+3+6+10+15+\cdots$$

a) Forklar at $a_8 = 1+2+3+\cdots+8$. Hva slags rekke er dette?

b) Finn et uttrykk for a_n.

c) Bruk lommeregneren til å finne summen av de 10 første trekanttallene.

For å finne en formel for S_n, kan vi starte med å se på

$$S_1 = a_1 = 1$$
$$S_2 = a_1 + a_2 = 1 + (1+2) = 2\cdot 1 + 1\cdot 2$$
$$S_3 = a_1 + a_2 + a_3 = 1 + (1+2) + (1+2+3) = 3\cdot 1 + 2\cdot 2 + 1\cdot 3$$
$$S_4 = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 1 + (1+2) + (1+2+3) + (1+2+3+4) = 4\cdot 1 + 3\cdot 2 + 2\cdot 3 + 1\cdot 4$$

d) Bruk mønsteret ovenfor til å skrive opp et tilsvarende uttrykk for S_n.
Finn S_{14} ved å bruke dette uttrykket.

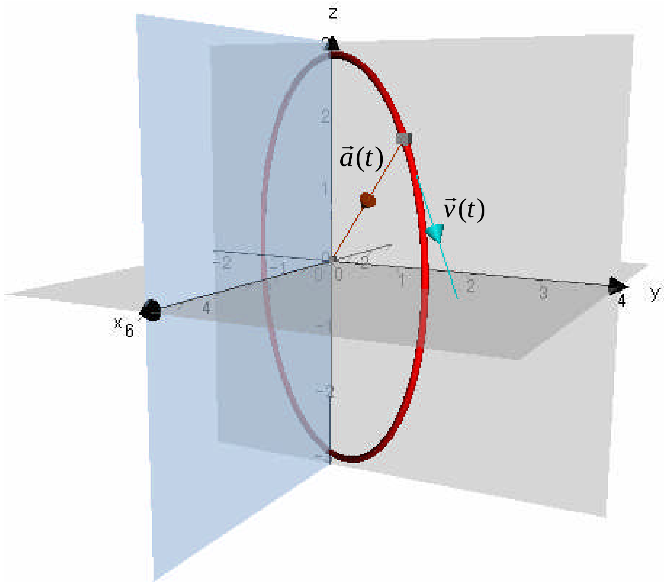
Oppgave 5

PARTIKKELBEVEGELSE

En partikkel følger en bane vist på figuren nedenfor. Posisjonen til partikkelen er gitt ved

$$\vec{r}(t) = \left[2\sin t\,,\, 2\sin t\,,\, \sqrt{8}\cos t\right] \quad , \quad t \in \left[0, 2\pi\right\rangle$$

På figuren er fartsvektoren $\vec{v}(t)$ og akselerasjonsvektoren $\vec{a}(t)$ tegnet inn i et punkt på banen.



a) Finn ved regning posisjonen til partikkelen når $t = 0$ og $t = \dfrac{\pi}{4}$.

b) Finn eventuelle fellespunkter mellom kurva og *xy*-planet.

c) Vis at $\left|\vec{r}(t)\right| = \sqrt{8}$. Undersøk om $\vec{r}(t) \perp \vec{v}(t)$. Hva slags bane følger partikkelen?

d) Bestem farts- og akselerasjonsvektoren til partikkelen når $t = \dfrac{\pi}{4}$.

e) Finn $\left|\vec{v}(t)\right|$ til partikkelen. Kommenter svaret.

Vinkelen mellom et plan og en kurve er den minste vinkelen mellom planet og tangenten til kurva i skjæringspunktet mellom kurva og planet. Tangenten har samme retning som fartsvektoren i punktet.

f) Finn vinkelen mellom partikkelbanen og *xy*-planet når partikkelen passerer dette planet første gang.

Kolstadgata 1
Postboks 2924 Tøyen
0608 OSLO
Telefon 23 30 12 00
Telefaks 23 30 12 99
www.utdanningsdirektoratet.no

Utdanningsdirektoratet