Løsningsforslag
Eksamen 3MX - AA6524 - 04.06.2007

eksamensoppgaver.org

September 20, 2008

Om løsningsforslaget

Løsningsforslaget for matematikk eksamen i 3MX er gratis, og det er lastet ned på eksamensoppgaver.org. Løsningen er myntet på elever og privatister som vil forbrede seg til eksamen i matematikk. Lærere må gjerne bruke løsningsforslaget i undervisningsøyemed, men virksomheter har ingen rett til å anvende dokumentet.

Løsningsforslagene skal utelukkende distribueres fra nettstedet eksamensoppgaver.org, da det er viktig å kunne føye til og rette eventuelle feil i ettertid. På den måten vil alle som ønsker det, til enhver tid finne det siste oppdaterte verket. eksamensoppgaver.org ønsker videre at flest mulig skal få vite om eksamensløsningene, slik at det finnes et eget nettsted hvor man kan tilegne seg dette gratis.

Dersom du sitter på ressurser du har mulighet til å dele med deg, eller ønsker å bidra på annen måte, håper eksamensoppgaver.org på å høre fra deg.

Innholdsfortegnelse

oppgave 1

a)

$$f(x) = 3x \cdot \sin(2x)$$

deriverer med produkt- og kjerneregleln

$$f'(x) = 3(x)' \cdot \sin(2x) + 3x \cdot (\sin(2x))' \cdot 2(x)'$$

$$f'(x) = 3\sin(2x) + 6x\cos(2x)$$

b)

$$f(x) = \tan^2 x$$

deriverer ved med kjerneregelen, slik

$$f'(x) = \left((\tan x)^2\right)' \cdot (\tan x)'$$

skriver om kjernen, slik at derivasjonen blir tydeligere

$$f'(x) = 2\tan x \cdot \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)'$$

deriverer kjernen med kvotientregelen

$$f'(x) = 2\tan x \cdot \left(\frac{(\sin x)' \cdot \cos x - \sin x \cdot (\cos x)'}{\cos^2 x}\right)$$

$$f'(x) = 2\tan x \cdot \left(\frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x}\right)$$

bruker ikke identiteten i telleren til den deriverte av kjernen, men skriver den om

$$f'(x) = 2\tan x \cdot \left(\frac{\cos^2 x}{\cos^2 x} + \frac{\sin^2 x}{\cos^2 x}\right)$$

og får

$$f'(x) = 2\tan x \cdot \left(1 + \tan^2 x\right)$$

Bruker man identiteten $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ får man

$$f'(x) = \frac{2\tan x}{\cos^2 x} = \frac{2 \cdot \frac{\sin x}{\cos x}}{\cos^2 x} = \frac{2\sin x}{\cos^3 x}$$

som selvfølgelig er like riktig.

c)

$$\int 2x \cdot e^{x^2} dx$$

merker oss straks at den deriverte av eksponenten til e er lik $2x$. Da blir det naturlig å sette følgende substitusjon

$$u = x^2 \qquad du = 2x \cdot dx$$

dermed substituerer vi og får

$$\int e^u du = e^u + C$$

setter tilbake og har

$$\int 2xe^{x^2} = e^{x^2} + C$$

d)

$$1 + \cos(2x) = \sin^2(2x)$$

Bruker identiteten $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ ‘baklengs‘ på ettallet.

$$\left(\sin^2 x + \cos^2 x\right) + \left(\cos^2 x - \sin^2 x\right) = \sin^2(2x)$$

$$2\cos^2 x = 2 \cdot \sin x \cos x \cdot 2 \cdot \sin x \cos x$$

$$2\cos^2 x = 4\sin^2 x \cdot \cos^2 x$$

flytter alt over på høyre side og faktoriserer

$$\left(2 - 4\sin^2 x\right) \cdot \cos^2 x = 0$$

vi har nå to faktorer, der minst en av dem må være null for at likningen skal være sann. Tar for oss $2 - 4\sin^2 x$ først.

$$2 = 4\sin^2 x = 0$$

$$\sin^2 x = \frac{1}{2}$$

$$\sin x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$x = \arcsin\left(\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$x_1 = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \quad \vee \quad x_2 = \pi - \frac{\pi}{4} + 2k\pi \quad \vee \quad x_3 = \pi + \frac{\pi}{4} + 2k\pi \quad \vee \quad x_4 = 2\pi - \frac{\pi}{4} + 2k\pi \qquad k \in \mathbb{Z}$$

$$x_1 = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \quad \vee \quad x_2 = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi \quad \vee \quad x_3 = \frac{5\pi}{4} + 2k\pi \quad \vee \quad x_4 = \frac{7\pi}{4} + 2k\pi$$

og deretter

$$\cos^2 x = 0$$

$$\cos x = 0$$

$$x = \arccos(0)$$

$$x_5 = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad \vee \quad x_6 = \frac{\pi}{2} - 2\pi + \pi 2 + 2k\pi$$

$$x_5 = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \quad \vee \quad x_6 = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$$

PHEW! Da skulle vi ha alle løsningene!

e)

Vi skal finne bunnpunktet på grafen til funksjonen

$$f(x) = \frac{x}{\ln x}$$

deriverer

$$f'(x) = \frac{(x)' \cdot \ln x - x \cdot (\ln x)'}{(\ln x)^2}$$

$$f'(x) = \frac{\ln x - \cancel{x} \cdot \frac{1}{\cancel{x}}}{\ln^2 x}$$

$$f'(x) = \frac{\ln x - 1}{\ln^2 x}$$

da skulle ekstremalpunktet på grafen være gitt når

$$f'(x) = 0$$

$$\frac{\ln x - 1}{\ln^2 x} = 0$$

$$\ln x - 1 = 0$$

$$x = e^1$$

dermed

$$f(e) = \frac{e}{\ln e} = e$$

vi har funnet punktet (e, e) ved å grafe funksjonen, ser vi at dette er et bunnpunkt.

f.1)

k	1	2	3
$P(\text{X} = k)$	$\frac{3}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{1}{6}$

Forventningsveriden gir anslått antall øyne på terningen

$$E(X) = 1 \cdot \frac{3}{6} + 2 \cdot \frac{2}{6} + 3 \cdot \frac{1}{6} = \frac{3+4+3}{6} = \frac{5}{3}$$

f.2)

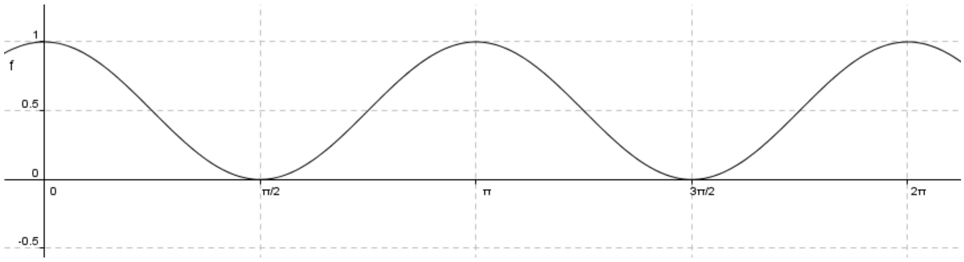
Standardavviket

$$SD(X) = \sqrt{\left(1 - \frac{5}{3}\right)^2 \cdot \frac{3}{6} + \left(2 - \frac{5}{3}\right)^2 \cdot \frac{2}{6} + \left(3 - \frac{5}{3}\right)^2 \cdot \frac{1}{6}}$$

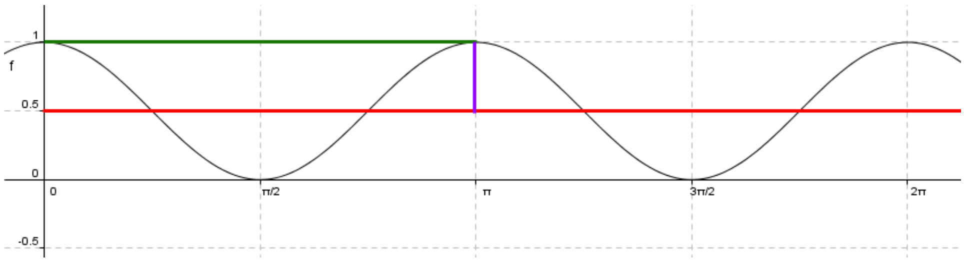
$$SD(X) = \sqrt{\frac{(-2)^2 \cdot 3 + 1^2 \cdot 2 + 4^2 \cdot 1}{3^2 \cdot 6}} = \sqrt{\frac{5}{9}} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

oppgave 2

a)



b)



Likevektslinja

$$y = d = \frac{1}{2}$$

Perioden

$$P = \pi$$

Amplituden

$$A = \frac{1}{2}$$

c)

$\phi = \frac{\pi}{2}$ fordi grafen til $\cos\theta$ er forskjøvet $\frac{\pi}{2}$ mot venstre i forhold til $\sin\theta$.

$$P = \frac{2\pi}{c} \quad \Rightarrow \quad c = \frac{2\pi}{P} = \frac{2\pi}{\pi} = 2$$

$$f(x) = \frac{1}{2}\sin\left(2x + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{2}$$

d)

$$\frac{1}{2}\sin\left(2x+\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2}\left(\sin(2x)\cdot\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)+\cos(2x)\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)=-\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2}\Bigg(\sin(2x)\cdot 0+\cos(2x)\cdot 1\Bigg)=-\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2}\Bigg(\cos(2x)\Bigg)=-\frac{1}{2}$$

Bruker sammenhengen på $\cos(2x)$

$$\frac{1}{2}\Bigg(2\cos^2 x-1\Bigg)=-\frac{1}{2}$$

$$\cos^2 x-\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}$$

flytter over

$$\cos^2 x=0$$

og bang! Vi har vist ekvivalensen mellom de to uttrykkene

$$f(x)=\cos^2 x$$

oppgave 3

a)

X = ‘Antall personer som overlever operasjonen‘

$$P(X = 16) = \binom{20}{16} \cdot (0.9)^{16} \cdot (0.1)^4 \approx 0.0898$$

Sannsynlighetsfordelingen jeg har nyttet ovenfor kalles binomisk sannsynlighetsfordeling. Årsaken til at denne er passende i dette tilfellet er flere. Verdt å nevne, er det at utfallet av en operasjon ikke påvirker utfallet av den neste. Sannsynligheten er derfor lik uavhengig av antall forsøk. Det er også kun to utfall. Enten så overlever pasienten, eller så dør han/hun.

b)

Siden vi kan anta at X er binomisk fordelt, kan vi videre finne forventningsverdi og standardavvik på følgende måte.

$$\mu = n \cdot p = 200 \cdot 0.9 = 180$$

og

$$\sigma = \sqrt{np \cdot (1-p)} = \sqrt{200 \cdot 0.9 \cdot (1-0.9)} = \sqrt{200 \cdot 0.9 \cdot 0.1} = \sqrt{18} \approx 4.24$$

c)

$$P(X < 168) = \Phi\left(\frac{168-180}{\sqrt{18}}\right) \approx \Phi(-2.83)$$

Bruker tabell over den kumulative normalfordelingen

$$P(X < 168) = \Phi(-2.83) = 1 - \Phi(2.83) = 1 - 0.9977 = 0.0023$$

og der har vi sannsynligheten.

d)

$$P(168 \geq X \geq 186) = \Phi\left(\frac{186-180}{\sqrt{18}}\right) - \Phi\left(\frac{168-180}{\sqrt{18}}\right)$$

$$P(168 \geq X \geq 186) = \Phi(1.41) - \Phi(-2.83) = \Phi(1.41) - 1 + \Phi(2.83)$$

Leser av tabell

$$P(168 \geq X \geq 186) = 0.9207 - 1 + 0.9977 = 0.9184$$

e)

$$\hat{p} = \frac{X}{n} = \frac{63}{90} = \frac{7}{10} = 0.7$$

og

$$S_{\hat{p}} = \sqrt{\frac{\frac{7}{10} \cdot \left(1 - \frac{7}{10}\right)}{90}} = \sqrt{\frac{7}{3000}} = \frac{\sqrt{7}}{10\sqrt{30}} = \frac{\sqrt{210}}{300} \approx 0.0483$$

f)

$$\langle \hat{p} \mp Z \cdot S_{\hat{p}} \rangle$$

$$\Phi(Z) = \frac{0.95 + 1}{2} = 0.975$$

Tabellen gir da $Z = 1.96$ for 0.95 konfidensnivå.

$$\left\langle 0.7 \mp 1.96 \cdot \frac{\sqrt{210}}{300} \right\rangle = \langle 0.6076,\ 0.7924 \rangle$$

legger merke til at $\hat{p}$ er middelverdien til konfidensintervallet. I tillegg er konfidensintervallet bare 18.5% bredt og $p = 0.90$ er utenfor. Det impliserer at den er svært usikker.

$$p > \hat{p}$$

oppgave 4 - alternativ I

a)

Av likningen

$$(x+12)^2 + (y+15)^2 = 25$$

har vi

$$(x-(-12))^2 + (y-(-15))^2 = 5^2$$

Dermed har vi funnet sentrum i den lille sirkelen som jfr tegningen ligger i 3 kvadrant $A(-12,-15)$ For neste likning

$$(x-24)^2 + (y-12)^2 = 10^2$$

følger det at $C(24,12)$ Finner vektoren

$$\overrightarrow{AC} = [24-(-12), 12-(-15)] = [36, 27]$$

og lengden av vektoren blir

$$|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{(36)^2 + (27)^2} = \sqrt{2025} = 45$$

b)

Radien til den minste sirkelen

$$r_B = \frac{1}{2} \cdot \left(|\overrightarrow{AC}| - (r_A + r_C) \right) = \frac{1}{2} \cdot (45 - (5+10)) = 15$$

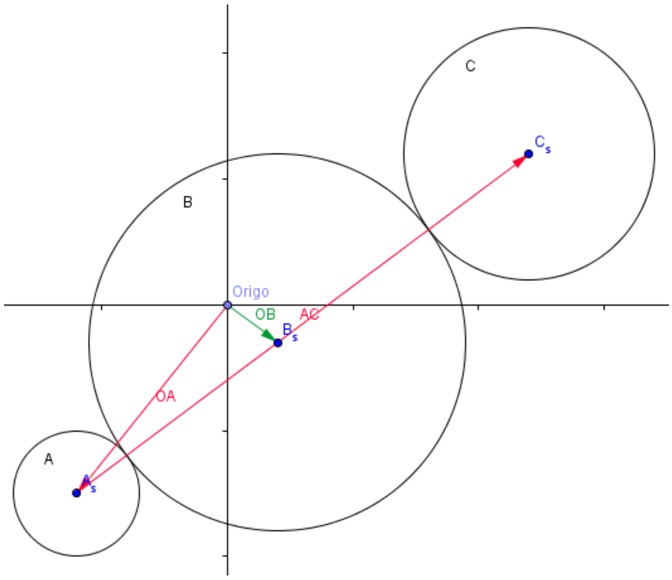
c)

Vi vet at radiene for de gitte sirklene 5, 15 og 10 enheter. Vi vet også at lengden mellom A og C er 45. Dermed skal vi 'gå' $\frac{5+15}{45} = \frac{4}{9}$ fra A i retning C for å nå punktet B.

$$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OA} + \frac{4}{9} \cdot \overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{OB} = [-12, -15] + \frac{4}{9} \cdot [36, 27] = [-12 + 16, -15 + 12] = [4, -3]$$

Altså er $B(4, -3)$ Fremgangsmåten er vist her



Da blir det en smal sak å sette opp likningen for sirkelen

$$(x - 4)^2 + (y + 3)^2 = 15^2$$

d)

Vi innfører linjen n og er gitt følgende.

- n går gjennom $B(4, -3)$
- $n \perp \overrightarrow{AC}$
- n skjærer den midterste sirkelen

Vi finner retningsvektoren for n

$$\overrightarrow{AC} \perp \vec{v}$$

da følger det av

$$[a, b] \perp [-b, a]$$

at

$$\vec{v} = [-27, 36]$$

Da har vi nok opplysninger til å innføre n ved parameterfremstillingen

$$x = 4 - 27t \qquad \wedge \qquad y = -3 + 36t$$

Setter dette inn i sirkellikningen for den midterste sirkelen og løser med hensyn på t

$$((4-27t)-4)^2 + ((-3+36t)+3)^2 = 15^2$$
$$(-27t)^2 + (36t)^2 = 15^2$$
$$2025t^2 = 225$$
$$t = \pm\sqrt{\frac{225}{2025}} = \pm\frac{15}{45} = \pm\frac{1}{3}$$

som vi setter inn i parameterfremstillingen og finner følgende punkter.

$$x = 4 - 27 \cdot \frac{1}{3} = -5$$

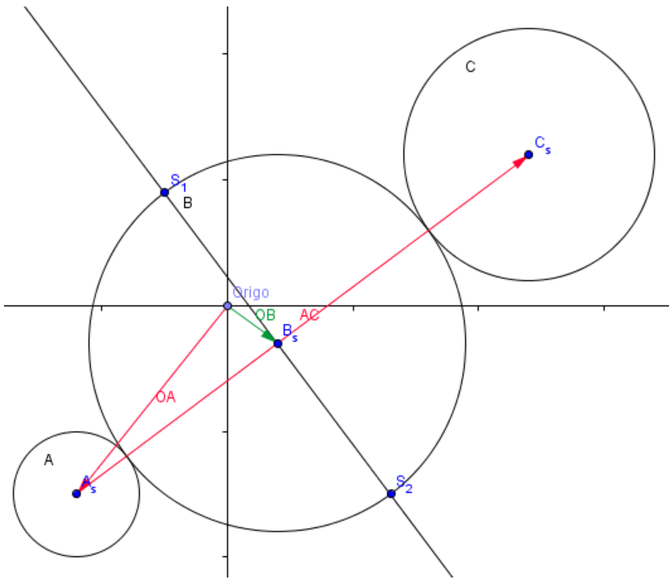
$$y = -3 + 36 \cdot \frac{1}{3} = 9$$

og

$$x = 4 - 27 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = 13$$

$$y = -3 + 36 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = -15$$

Skjæringspunktene er $S_1(-5, 9)$ og $S_2(13, -15)$ og svaret er illustrert nedenfor



oppgave 4 - alternativ II

a)

Vi undersøker rekka og observerer følgende

$$(a_2 - a_1) = (2 - 1) = 1$$

og

$$(a_4 - a_3) = (4 - 3) = 1$$

Altså øker hvert tall i rekka med 1. Rekka er altså aritmetisk fordi differansen mellom to ledd i rekka er 1.

$$a_n = a_1 + (n - 1)d$$

Satt inn og trukket sammen får vi

$$a_n = n$$

b)

Jeg synes formuleringen er uheldig i dette oppgaven. En kan tro man skal finne et uttrykk for a_n i a), men jeg tar utgangspunkt i at de vil at man skal bestemme a_n for trekanttallene som nevnes innledningsvis.

Vi ser at rekka går slik

$$1 + 3 + 6 + 10 + 15 + \ldots$$

Vi kan tenke oss et rektangel med sider lik $3 \cdot 4$ prikker. Da får vi trekanten

$$\frac{3 \cdot (3 + 1)}{2} = \frac{3 \cdot 4}{2} = \frac{12}{2} = 6$$

altså 6 prikker. Vi kan generalisere dette uttrykket

$$a_n = \frac{n \cdot (n + 1)}{2}$$

Prøver vi feks med det første leddet, får vi

$$a_1 = \frac{1 \cdot (1 + 1)}{2} = 1$$

og det andre leddet gir

$$a_2 = \frac{2 \cdot (2 + 1)}{2} = \frac{6}{2} = 3$$

Dette stemmer som vi ser, men vi kan også observere at hvert ledd i rekka for trekanttallene, er summen av den aritmetiske rekka i a)

$$a_1 + a_2 + a_3 = 1 + (1 + 2) + (1 + 2 + 3) = 1 + 3 + 6$$

c)

Går inn i ‘RUN‘ og plotter inn følgende

$$\sum\left(\frac{n\cdot(n+1)}{2},\ X,\ 1,\ 10,\ 1\right)=220$$

d)

$$S_n=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

dermed

$$S_{14}=\frac{14(14+1)(14+2)}{6}=\frac{14\cdot 15\cdot 16}{6}=560$$

oppgave 5

a)

$$\vec{r}(t) = \left[2\sin t,\ 2\sin t,\ \sqrt{8}\cos t\right]$$

Finner posisjonen til vektoren når $t = \left\{0,\ \frac{\pi}{4}\right\}$

$$\vec{r}(0) = \left[2\sin(0),\ 2\sin(0),\ \sqrt{8}\cos(0)\right]$$

$$\vec{r}(0) = \left[0,\ 0,\ \sqrt{8}\right]$$

og

$$\vec{r}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left[2\cdot\sin\left(\frac{\pi}{4}\right),\ 2\cdot\sin\left(\frac{\pi}{4}\right),\ \sqrt{8}\cdot\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]$$
$$\vec{r}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left[\sqrt{2},\ \sqrt{2},\ 2\right]$$

b)

Vi kaller xy-planet α og gir det normalvektoren $\vec{n} = [0,0,1]$. Likninga for planet er da gitt ved

$$\alpha : \qquad z = 0$$

Setter inn for z fra $\vec{r}(t)$

$$\sqrt{8}\cos t = 0$$

$$t = \arccos(0)$$

$$t_1 = \frac{\pi}{2} \qquad \vee \qquad t_2 = \pi + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2}$$

Trenger kun t for første omløp. Vi setter inn for t i $\vec{r}(t)$ og finner følgende;

$$\vec{r}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left[2\sin\left(\frac{\pi}{2}\right),\ 2\sin\left(\frac{\pi}{2}\right),\ \sqrt{8}\cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]$$

$$\vec{r}\left(\frac{\pi}{2}\right) = [2,\ 2,\ 0]$$

og

$$\vec{r}\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \left[2\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right),\ 2\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right),\ \sqrt{8}\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right]$$
$$\vec{r}\left(\frac{3\pi}{2}\right) = [-2,\ -2,\ 0]$$

c)

$$|\vec{r}(t)| = \sqrt{(2\sin t)^2 + (2\sin t)^2 + \left(\sqrt{8}\cos t\right)^2}$$

$$|\vec{r}(t)| = \sqrt{4\sin^2 t + 4\sin^2 t + 8\cos^2 t}$$

$$|\vec{r}(t)| = \sqrt{8\left(\sin^2 t + \cos^2 t\right)}$$

$$|\vec{r}(t)| = \sqrt{8 \cdot 1} = \sqrt{8}$$

Finner $\vec{v}(t)$

$$\vec{v}(t) = \vec{r}'(t)$$

$$\vec{v}(t) = \left[2 \cdot (\sin t)', \, 2 \cdot (\sin t)', \, \sqrt{8} \cdot (\cos t)'\right]$$

$$\vec{v}(t) = \left[2\cos t, \, 2\cos t, \, -\sqrt{8}\sin t\right]$$

Sjekker om retnings- og fartsvektoren er ortogonale

$$\vec{r}(t) \cdot \vec{v}(t)$$

$$\left[2\sin t, \, 2\sin t, \, \sqrt{8}\cos t\right] \cdot \left[2\cos t, \, 2\cos t, \, -\sqrt{8}\sin t\right]$$

$$2\sin t \cdot 2\cos t + 2\sin t \cdot 2\cos t + \sqrt{8}\cos t \cdot \left(-\sqrt{8}\sin t\right)$$

$$4\sin t \cdot \cos t + 4\sin t\cos t - 8\sin t\cos t$$

$$0$$

Ja, $\vec{r}(t) \perp \vec{v}(t)$ Det betyr at fartsvektoren er lik tangenten og partikkelen følger banen til en sirkel.

d)

Bestemmer fartsvektoren når $t = \frac{\pi}{4}$

$$\vec{v}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left[2\cos\left(\frac{\pi}{4}\right), \, 2\cos\left(\frac{\pi}{4}\right), \, -\sqrt{8}\sin\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

$$\vec{v}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left[2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}, \, 2 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}, \, -\sqrt{8} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2}\right]$$

$$\vec{v}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left[\sqrt{2}, \, \sqrt{2}, \, -2\right]$$

Finner akselerasjonsvektoren $\vec{a}(t) = \vec{v}'(t) = \vec{r}''(t)$

$$\vec{a}(t) = \left[2\,(\cos t)', \, 2\,(\cos t)', \, -\sqrt{8}\,(\sin t)'\right]$$

$$\vec{a}(t) = \left[-2\sin t,\ -2\sin t,\ -\sqrt{8}\cos t\right]$$

og setter $t = \frac{\pi}{4}$

$$\vec{a}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left[-2\cdot\sin\left(\frac{\pi}{4}\right),\ -2\cdot\sin\left(\frac{\pi}{4}\right),\ -\sqrt{8}\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

$$\vec{a}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \left[-\sqrt{2},\ -\sqrt{2},\ -2\right]$$

e)

$$|\vec{v}(t)| = \sqrt{(2\cos t)^2 + (2\cos t)^2 + \left(-\sqrt{8}\sin t\right)^2}$$

$$|\vec{v}(t)| = \sqrt{8\left(\sin^2 x + \cos^2 x\right)} = \sqrt{8}$$

Banefarten er lik lengden av retningsvektoren.

f)

Første gang partikkelen passerer planet, er når $t = \frac{\pi}{2}$. Da er fartsvektoren

$$\vec{v}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left[2\cos\left(\frac{\pi}{2}\right),\ 2\cos\left(\frac{\pi}{2}\right),\ -\sqrt{8}\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right]$$

$$\vec{v}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left[0, 0, -\sqrt{8}\right]$$

en vilkårlig vektor i xy-planet er

$$\vec{m} = [1, 1, 0]$$

vinkelen mellom disse to vektorene er:

$$\theta = \arccos\left(\frac{\left[0, 0, -\sqrt{8}\right]\cdot[1, 1, 0]}{\sqrt{\left(-\sqrt{8}\right)^2}\cdot\sqrt{1^2+1^2}}\right) = \arccos(0) = 90^\circ$$

Fartsvektoren står normalt på xy-planet i dette punktet.

Dersom du er interessert, finner du flere løsningsforslag på eksamensoppgaver.org

SLUTT