Utdanningsdirektoratet

Eksempeloppgåve / Eksempeloppgave

Matematikk S1

April 2007

Programfag i studiespesialiserande program /
Programfag i studiespesialiserende program

Elevar/Elever
Privatistar/Privatister

Oppgåva ligg føre på begge målformer, først nynorsk, deretter bokmål. /
Oppgaven foreligger på begge målformer, først nynorsk, deretter bokmål.

Bokmål

Eksamensinformasjon	
Eksamenstid:	5 timer: Delprøve 1 skal leveres etter 2 timer. Delprøve 2 skal leveres etter 3 timer.
Hjelpemidler, delprøve 1:	Ingen hjelpemidler er tillatt, bortsett fra vanlige skrivesaker, passer, linjal, cm-mål og vinkelmåler.
Hjelpemidler, delprøve 2:	Alle hjelpemidler er tillatte, bortsett fra verktøy som tillater elevene å kommunisere med andre
Vedlegg:	Ingen
Vedlegg som skal leveres inn:	Ingen
Framgangsmåte og forklaring:	Der oppgaveteksten ikke sier noe annet, kan du fritt velge framgangsmåte. Om oppgaven krever en bestemt løsningsmetode, vil også en alternativ metode kunne gi noe uttelling. Det skal gå tydelig fram av besvarelsen hvordan du er kommet fram til svarene. Før inn nødvendige mellomregninger. Ved grafisk løsning må du markere avlesningene dine på figuren.
Veiledning om vurderingen:	Karakteren fastsettes etter en helhetlig vurdering. Det betyr at sensor vurderer i hvilken grad du – viser grunnleggende ferdigheter – kan bruke hjelpemidler – gjennomfører logiske resonnementer – ser sammenhenger i faget, er oppfinnsom og kan anvende fagkunnskap i nye situasjoner – vurderer om svar er rimelige – forklarer framgangsmåter og begrunner svar – skriver oversiktlig og er nøyaktig med utregninger, benevninger, tabeller og grafiske framstillinger

Delprøve 1

OPPGAVE 1

a) Deriver funksjonen

$$f\left(x\right) = 3x^3 + 2x^2 - 7$$

b) Bestem den gjennomsnittlige veksthastigheten til funksjonen $f(x) = 3 \cdot 2^x$ fra $x = 0$ til $x = 3$.

c) Skriv så enkelt som mulig

$$\frac{2x}{x^2 - 9} + \frac{3}{3x + 9}$$

d) Skriv så enkelt som mulig

$$\frac{a^{-3} \cdot \left(a \cdot b\right)^2}{a \cdot b^{-1}}$$

e) Løs ligningssystemet

$$\begin{aligned} \text{I}: &\quad x^2 + 6 = y + 5x \\ \text{II}: &\quad 2x - y = -6 \end{aligned}$$

f) Regn ut $\binom{8}{6}$. Forklar hvor i Pascals trekant du finner denne binomialkoeffisienten.

g) På en volleyballkamp møter det 8 spillere, 5 jenter og 3 gutter. Det trekkes ut 6 spillere som skal starte å spille. Hva er sannsynligheten for at alle guttene får starte?

OPPGAVE 2

Gitt funksjonen $f(x) = x^3 - 3x^2$

a) Finn skjæringspunktene mellom grafen til f og koordinataksene.

b) Regn ut $f'(x)$ og bruk denne til å finne eventuelle topp- og bunnpunkter på grafen til f.

c) Tegn grafen til f.

d) Finn gjennomsnittlig veksthastighet fra $x = -1$ til $x = 3$ både grafisk og ved regning.

Delprøve 2

OPPGAVE 3

Når vi tipper en enkeltrekke i fotballtipping, skal vi tippe resultatet i 12 fotballkamper. Utfallet av en kamp er enten hjemmeseier (H), uavgjort (U) eller borteseier (B).

a) Hvilke antagelser må du gjøre for at det å tippe en enkeltrekke kan sees på som et binomisk forsøk med $n = 12$ og $p = \frac{1}{3}$?

I resten av oppgaven skal vi anta at betingelsene for binomisk forsøk er oppfylt.

For å få gevinst må vi ha minst 10 rette.

b) Hva er sannsynligheten for å få minst 10 rette når vi tipper én enkeltrekke?

En tipper hevdet at det var like vanskelig å få 0 rette som å få 12 rette.

c) Vis at han tar feil, og forklar hvorfor de to sannsynlighetene ikke blir like.

En ekspert på fotballtipping hevder at han i gjennomsnitt vil få gevinst på hver femte enkeltrekke han tipper.

d) Finn, gjerne ved prøving og feiling, hvor stor sannsynlighet p tippeeksperten må ha i gjennomsnitt for å tippe rett resultat på hver enkelt kamp.

OPPGAVE 4

Du skal besvare enten alternativ I eller alternativ II.
De to alternativene er likeverdige ved vurderingen.

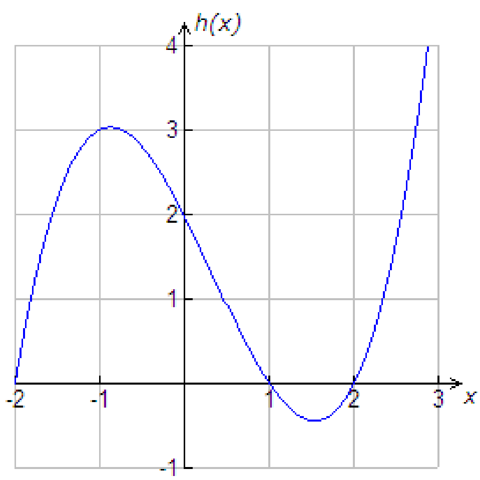
(Dersom besvarelsen inneholder deler av begge,
vil bare det du har skrevet på alternativ I, bli vurdert.)

Alternativ I

Stigningstallet til tangenten i et punkt på grafen til en funksjon forteller hvor "bratt" grafen er i dette punktet. Denne størrelsen har vi ofte nytte av i praksis. I denne oppgaven skal vi bruke forskjellige metoder for å bestemme stigningstall.

a) Funksjonen g er gitt ved $g(x) = 2x^3 - 12x^2 - 5x + 8$. Deriver funksjonen og bestem $g'(4)$.

b) Grafen til funksjonen h er tegnet nedenfor:



1) Tegn fortegnslinja til $h'(x)$.

2) Tegn grafen til h på svararket ditt. Vis hvordan du kan bruke grafen til å finne en tilnærmingsverdi for $h'(1)$.

Sammenhengen mellom kostnaden $K(x)$ i kroner ved produksjon av en vare og antall produserte enheter x er gitt i tabellen nedenfor.

x	0	100	300	500	700
$K(x)$	30 000	83 000	207 000	355 000	527 000

c) Bruk regresjon til å skrive $K(x)$ på formen $K(x) = ax^2 + bx + c$.

d) Finn $K'(300)$. Forklar hva dette svaret forteller oss.

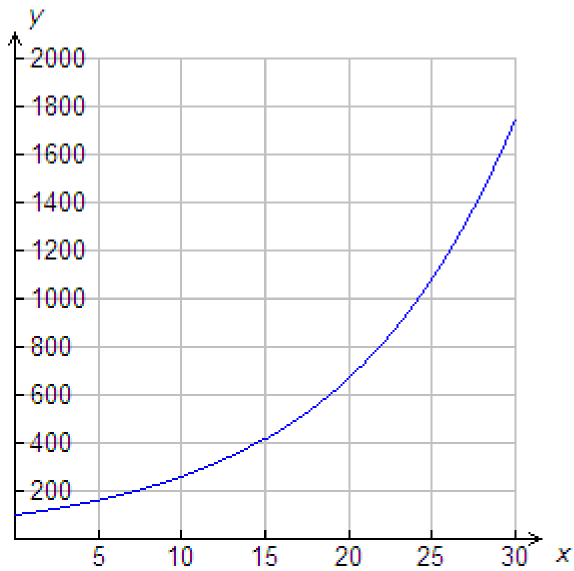
Varene selges for 710 kroner per enhet.

e) Vis at overskuddet i kroner er gitt ved uttrykket $O(x) = -0,3x^2 + 210x - 30\,000$

f) Bruk derivasjon til å finne hvilken produksjon som gir størst overskudd.

Alternativ II

I denne oppgaven skal vi studere eksponentialfunksjonen. En eksponentialfunksjon er definert ved $f(x) = a \cdot b^x$, der a og b er konstanter.
Til høyre ser du grafen til funksjonen dersom $a = 100$ og $b = 1,1$.



a) Forklar hva verdiene til a og b forteller oss.

b) Hvor mye må x økes for at funksjonsverdien skal fordobles? Vis at økningen er den samme uansett hvor på grafen du starter.

c) Finn den momentane veksten når $x = 10$ og når $x = 20$.

Vi definerer den relative veksten i et punkt $(x_0\,,\ f(x_0))$ som

$$\frac{\text{den momentane veksten i punktet}}{\text{funksjonsverdien i punktet}} = \frac{f'(x_0)}{f(x_0)}$$

d) Finn den relative veksten når $x = 10$ og når $x = 20$.

En egenskap ved eksponentialfunksjonen er at den relative veksten er konstant, det vil si at den er den samme for alle verdier av x.

e) Velg en annen verdi for x enn verdiene i d), og vis at den relative veksten fortsatt er den samme.

OPPGAVE 5

Aina, Britt og Kim dekorerer T-skjorter og topper. De har spesialisert seg på hver sin del av dekoren.

- Aina bruker 6 minutter på sin del av dekoren på en skjorte, og 30 minutter på sin del av dekoren på en topp.
- Britt bruker 20 minutter på sin del av dekoren på en skjorte og 20 minutter på sin del av dekoren på en topp.
- Kim bruker 30 minutter på sin del av dekoren på en skjorte og 12 minutter på sin del av dekoren på en topp.

Aina kan arbeide inntil 5 timer per dag. Britt kan arbeide maksimalt 6 timer og Kim 8 timer hver dag.

De dekorerer i alt x skjorter og y topper hver dag.

a) Forklar at x og y må tilfredsstille følgende ulikheter:

1) $x \geq 0$ og $y \geq 0$

2) $y \leq -\frac{1}{5}x + 10$

3) $y \leq -x + 18$

4) $y \leq -\frac{5}{2}x + 40$

b) Tegn et passende koordinatsystem, og skraver det området som er definert av ulikhetene ovenfor.

c) Hver skjorte selges for 250 kroner, og hver topp selges for 300 kroner. Regn ut den største inntekten Aina, Britt og Kim kan oppnå til sammen per dag.

d) De innretter produksjonen slik at inntekten blir størst mulig. En av dekoratørene får da tid til overs og må rydde arbeidslokalet. Undersøk hvem av de tre som får denne jobben, og hvor mye tid denne personen kan bruke på ryddearbeidet.