Løsningsforslag for eksempeloppgave REA3026 Matematikk S1 - April 2007

eksamensoppgaver.org

Om løsningsforslaget

Løsningsforslaget for matematikk eksamen i S1 er gratis, og det er lastet ned på eksamensoppgaver.org. Løsningen er myntet på elever og privatister som vil forbrede seg til eksamen i matematikk. Lærere må gjerne bruke løsningsforslaget i undervisningsøyemed, men virksomheter har ingen rett til å anvende dokumentet.

Løsningsforslagene skal utelukkende distribueres fra nettstedet eksamensoppgaver.org, da det er viktig å kunne føye til og rette eventuelle feil i ettertid. På den måten vil alle som ønsker det, til enhver tid finne det siste oppdaterte verket. eksamensoppgaver.org ønsker videre at flest mulig skal få vite om eksamensløsningene, slik at det finnes et eget nettsted hvor man kan tilegne seg dette gratis.

Dersom du sitter på ressurser du har mulighet til å dele med deg, eller ønsker å bidra på annen måte, håper eksamensoppgaver.org på å høre fra deg.

Innholdsfortegnelse

oppgave 1

a)

Deriverer

$$\begin{aligned} f(x) &= 3x^3 + 2x^2 - 7 \\ f'(x) &= 3 \cdot \left(x^3\right)' + 2 \cdot \left(x^2\right)' - (7)' \\ &= 3 \cdot 2 \cdot x^2 + 2 \cdot 2 \cdot x - 0 \\ &= 6x^2 + 4x \end{aligned}$$

b)

Vi lar $\overline{G}$ være gjennomsnittlig veksthastighet til

$$f(x) = 3 \cdot 2^x \qquad x \in [0, 3]$$

så

$$\overline{G} = \frac{f(3) - f(0)}{3 - 0} = \frac{3 \cdot 2^3 - 3 \cdot 2^0}{3} = \frac{21}{3} = 7$$

c)

Vi skal skrive så enkelt som mulig;

$$\begin{aligned} \frac{2x}{x^2 - 9} + \frac{3}{3x + 9} &= \frac{2x}{(x-3)(x+3)} + \frac{3}{3(x+3)} \\ &= \frac{2x \cdot 3(x+3) + 3 \cdot (x+3)(x-3)}{3(x+3)(x-3)(x+3)} \\ &= \frac{2x \cdot 3\cancel{(x+3)} + 3 \cdot \cancel{(x+3)}(x-3)}{3\cancel{(x+3)}(x+3)(x-3)} \\ &= \frac{6x + 3x - 9}{3(x+3)(x-3)} \\ &= \frac{9x - 9}{3(x+3)(x-3)} \end{aligned}$$

d)

Trekker sammen

$$\begin{aligned}\frac{a^{-3}\cdot(a\cdot b)^2}{a\cdot b^{-1}} &= \frac{a^2\cdot b^2}{a^{1+3}\cdot b^{-1}}\\ &= \frac{b^{2+1}}{a^{4-2}}\\ &= \frac{b^3}{a^2}\end{aligned}$$

e)

Løser først II med hensyn på y;

$$2x - y = -6$$

$$2x + 6 = y$$

setter inn for y i I og løser med hensyn på x

$$\begin{aligned} x^2+6 &= (2x+6)+5x\\ x^2+6 &= 7x+6\\ x^2-7x &= 0\\ x(x-7) &= 0\\ x &= 0 \qquad \vee \qquad x = 7\end{aligned}$$

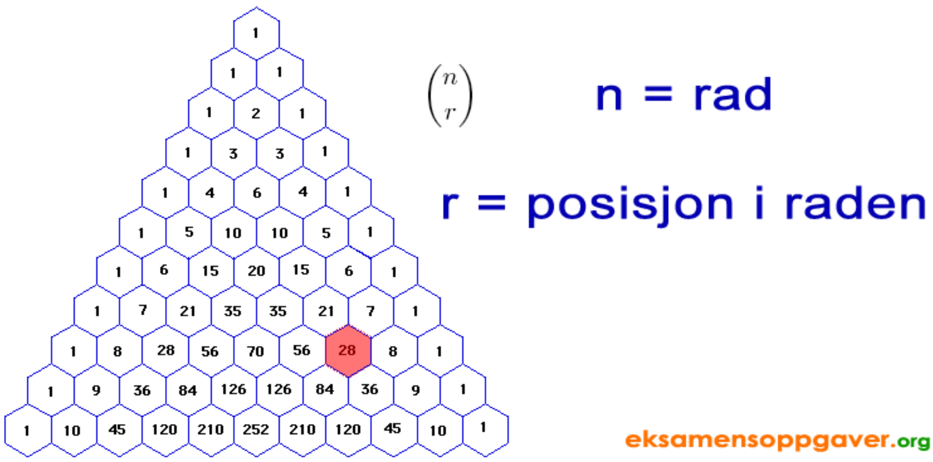
setter inn for x i II og finner

$$y(0) = 6$$

$$y(7) = 2\cdot 7 + 6 = 20$$

f)

$$\binom{8}{6} = \frac{8!}{6!(8-6)} = \frac{4 \cdot \cancel{2} \cdot 7 \cdot \cancel{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}}{\cancel{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \cdot 2} = 28$$



Som skrevet på bildet ser vi at vi finner igjen 28 i rad 8 tall nummer 6.

g)

Vi bruker hypergeometrisk fordeling og definerer X: 'Antall gutter som får starte'.

$$P(X=3) = \frac{\binom{5}{3} \cdot \binom{3}{3}}{\binom{8}{6}} = \frac{\frac{5 \cdot 2 \cdot \cancel{2 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}}{\cancel{3 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 1}} \cdot 1}{28} = \frac{10}{28} = \frac{5}{14}$$

oppgave 2

a)

Den skjærer andreaksen når $x = 0$, så

$$f(0) = 0$$

altså i origo. Førsteaksen;

$$x^3 - 3x^2 = 0$$

$$x^2(x - 3) = 0$$

$$x = 0 \qquad \vee \qquad x = 3$$

altså i origo (som vi allerede har funnet) og $(3, 0)$.

b)

$$f'(x) = \left(x^3\right)' - 3 \cdot \left(x^2\right)' = 3x^2 - 6x$$

og ekstremalpunktene finner vi når den deriverte er null, så

$$3x^2 - 6x = 0$$

$$3x(x - 2) = 0$$

$$x = 0 \qquad \vee \qquad x = 2$$

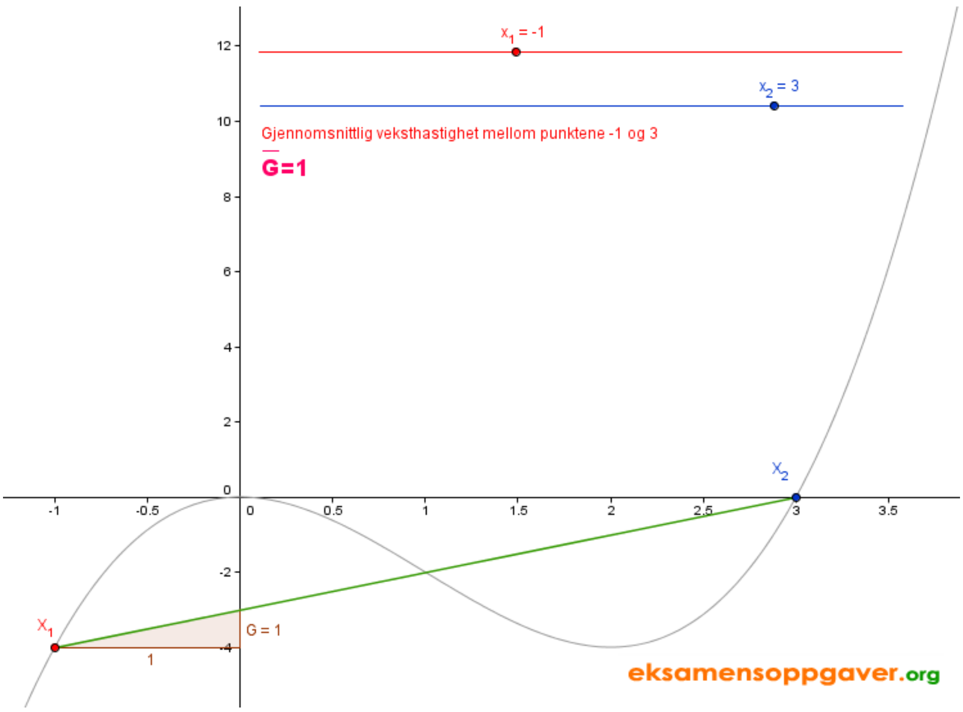
som gir

$$f(0) = 0$$

$$f(2) = 2^3 - 3 \cdot 2^2 = 8 - 12 = -4$$

så toppunkt i origo og bunnpunkt i $(2, -4)$.

c)



d)

Gjennomsnittlig veksthastighet er markert grafisk på bildet i deloppgave c. Her finner jeg den ved regning;

$$
\begin{aligned}
\overline{G} &= \frac{f(3) - f(-1)}{3 - (-1)} \\
&= \frac{3^3 - 3 \cdot 3^2 - \left((-1)^3 - 3 \cdot (-1)^2\right)}{4} \\
&= \frac{0 - (-1 - 3)}{4} \\
&= \frac{4}{4} \\
&= 1
\end{aligned}
$$

oppgave 3

a)

Man må se på det som like sannsynlig at utfallet av hver kamp blir H, U eller B. I tillegg må vi forutsette at det er like stor sannsynlighet for utfallet av hver kamp. Ingen av disse antagelsene er reelle. Videre får man ikke gardere seg, men kun velge ett utfall i hver kamp.

b)

Vi lar X være 'Antall rette på én enkeltrekke'.

$$P(X \geq 10) = \binom{12}{10} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{10} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{2} + \binom{12}{11} \cdot \left(\frac{1}{3}\right)^{10} \cdot \left(\frac{2}{3}\right) + \left(\frac{1}{3}\right)^{12}$$

$$P(X \geq 10) = 66 \cdot \frac{2^2}{3^{12}} + 12 \cdot \frac{2}{3^{12}} + \frac{1}{3^{12}}$$

$$P(X \geq 10) = \frac{289}{3^{12}} \approx 0,00054$$

c)

$$P(X = 12) = \left(\frac{1}{3}\right)^{12} = \frac{1}{3^{12}} \approx 0,00000189$$

og

$$P(X = 0) = \left(\frac{2}{3}\right)^{12} = \frac{2^{12}}{3^{12}} = \frac{4096}{531441} \approx 0,0077$$

de ble selvsagt ikke like fordi det er to måter å ta feil i en gitt kamp på (sannsynlighet 2/3), mens det kun er ett alternativ som gir riktig (sjans 1/3).

d)

Han hevder altså å vinne på hver femte enkeltrekke han tipper. Det betyr at han minst må ha 10 rette på hver femte rekke. Siden vi regner binomisk sannsynlighet for én og én rekke, skal

$$P(X \geq 10) = \sum_{x=10}^{12} \binom{12}{x} \cdot p^x \cdot (1-p)^{12-x} = \frac{1}{5}$$

og vi har likningen

$$\sum_{x=10}^{12} \binom{12}{x} \cdot p^x \cdot (1-p)^{12-x} = \frac{1}{5}$$

som jeg skriver inn på lommeregneren. Da finner jeg skjæringspunktet mellom de to sidene i likningen, og at

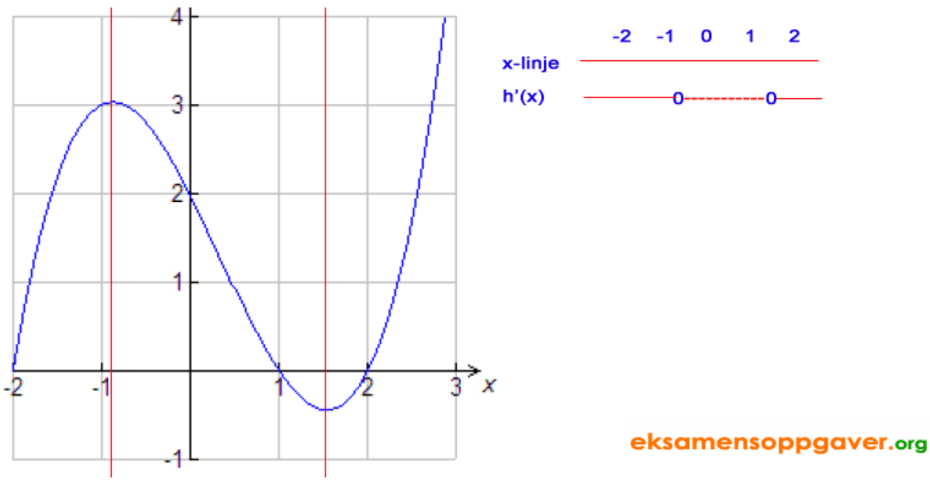
$$p \geq 0,6762$$

oppgave 4 - alternativ I

a)

$$
\begin{aligned}
g(x) &= 2x^3 - 12x^2 - 5x + 8 \\
g'(x) &= 2 \cdot 3x^2 - 12 \cdot 2x - 5 \\
&= 6x^2 - 24x - 5 \\
g'(4) &= 6 \cdot (4)^2 - 24 \cdot (4) - 5 \\
&= -5
\end{aligned}
$$

b.1)



Fortegnslinja er tegnet inn ovenfor. Som vi ser, så ligger nullpunktene til $h'(x)$ omtrent ved

$$P_1(-0,8\,,0) \qquad P_2(1,5\,,0)$$

b.2)

Jeg tar en litt annen tilnæring her. Først finner jeg funksjonsuttrykket. Vi ser at grafen har nullpunktene

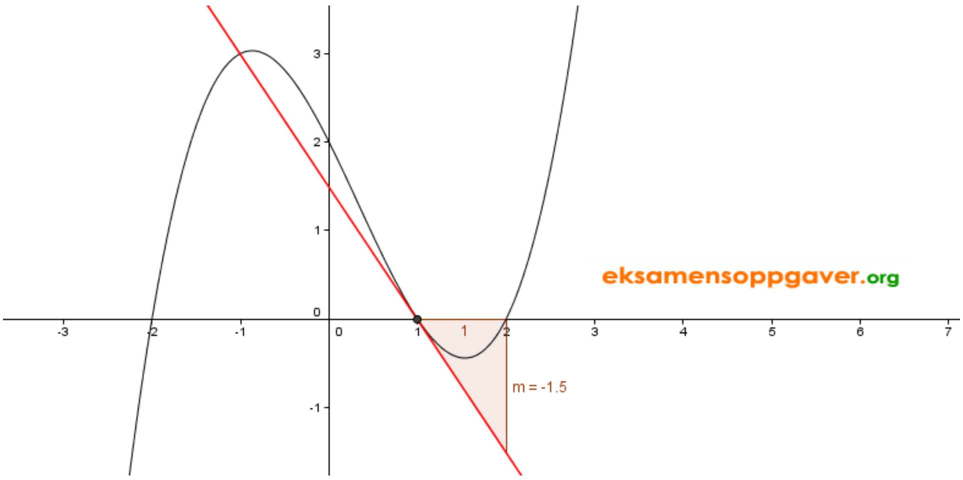
$$N_1(-2,0) \qquad N_2(1,0) \qquad N_3(2,0)$$

og skjærer y-aksen i punktet

$$Y(0,2)$$

Plotter vi disse punktene i 'STAT'-menyen og foretar regresjon på punktene finner vi at det er et polynom av tredje grad. Dette ser vi også av grafen.

$$h(x) = \frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{2}x^2 - 2x + 2$$



Ovenfor har jeg tegnet inn tangenten i punktet $(1, h(1))$. Videre har jeg markert stigningstallet til tangenten, som vi her ser er $m = -1,5$.

Deriverer vi h og setter $x = 1$, så finner vi at

$$h'(1) = \frac{3}{2} - 1 - 2 = -\frac{3}{2} = -1,5$$

altså har vi funnet riktig svar.

c)

Plotter verdiene i tabellen inn under 'STAT'-menyen på min Casio fx-9750G Plus kælkis, deretter kjører jeg regresjon på dataene og finner at

$$K(x) = 0,3x^2 + 500x + 30000$$

er en passende modell.

d)

$$K'(x) = 0,6x + 500$$
$$K'(300) = 0,6 \cdot (300) + 500 = 680$$

Dette betyr at kostnaden for å produsere en vare til (etter 300 stk) vil øke med 680 kr.

e)

Vi lager en inntektsfunksjon I (kr), uttrykkt ved x antall varer solgt.

$$I(x) = 710x$$

Videre vet vi at

$$\text{overskudd} \quad = \quad \text{inntekt} \quad - \quad \text{kostnad}$$

så

$$O(x) = I(x) - K(x)$$
$$O(x) = 710x - \left(0,3x^2 + 500x + 30000\right)$$
$$O(x) = -0,3x^2 + 210x - 30000$$

f)

$$O'(x) = -0,6x + 210$$

så

$$-0,6x + 210 = 0$$
$$x = \frac{-210}{-0,6} = 350$$

350 enheter vil gi det største overskuddet.

oppgave 4 - alternativ II

a)

I funksjonsuttrykket

$$f(x) = a \cdot b^x$$

representerer a startverdien, og b er vekstfaktoren startverdien multipliseres med. Setter vi $x = 0$, så vil vi bli gitt punktet $(0, a)$.

b)

Vi lar a stå, men setter inn for b, da får vi

$$f(x) = a \cdot 1,1^x$$

funksjonsverdien har doblet seg, når

$$a \cdot 1,1^x = 2a$$

hvilket gir oss

$$x = \frac{\ln(2)}{\ln(1,1)} \approx 7,27$$

c)

Vi deriverer først f, da finner vi

$$f'(x) = a \cdot (b^x)' = a \ln b \cdot b^x$$

dette gir oss

$$f'(10) = 100 \cdot \ln(1,1) \cdot 1,1^{10} \approx 27,721$$

og

$$f'(20) = 100 \cdot \ln(1,1) \cdot 1,1^{20} \approx 64,120$$

d)

Vi finner den relative veksten for $x = 10$

$$Rv_{10} = \frac{f'(10)}{f(10)} = \frac{24,721}{259,37} \approx 0,095$$

$$Rv_{20} = \frac{f'(20)}{f(20)} = \frac{64,120}{672,750} \approx 0,095$$

e)

Vi lar $x = n$, slik at

$$Rv_n = \frac{100 \cdot \ln(1,1) \cdot 1,1^a}{100 \cdot 1,1^n} = \frac{\cancel{100} \cdot \ln(1,1) \cdot \cancel{1,1^n}}{\cancel{100 \cdot 1,1^n}} = \ln(1,1) \approx 0,095$$

oppgave 5

a)

Vi setter opp en tabell over tidsforbruket hver av dem bruker på skjorter (x) og topper (y).

	Aina	Britt	Kim
x	6	20	30
y	30	20	12

1. Produksjonen vil være høyere eller lik null, for det er umulig å produsere negative klær, så;

$$x \geq 0 \qquad y \geq 0$$

2. Siden y representerer topper, så vil naturligvis produksjonen av skjorter påvirke antall topper Aina klarer å dekorere.

$$y \leq -\frac{6}{30} + \frac{5 \cdot 60}{30}$$

gir

$$y \leq -\frac{1}{5} + 10$$

3. Det gjelder også her, for Britt ser vi at den daglige produksjonen er uttrykkt ved ulikheten

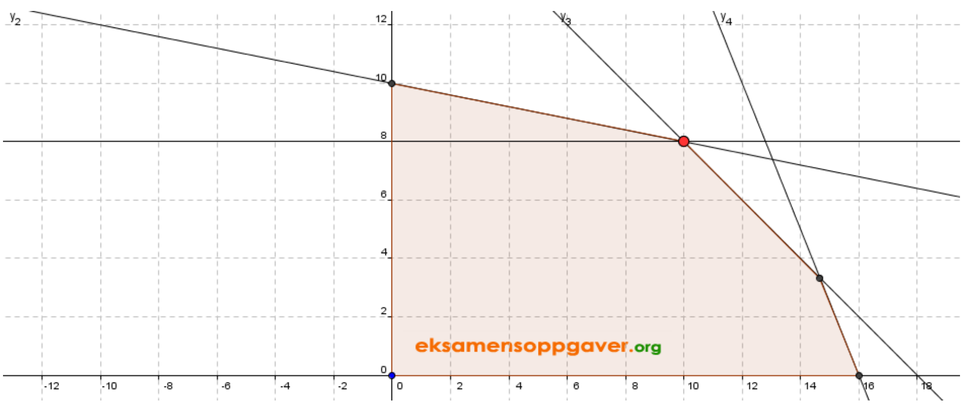
$$y \leq -\frac{20}{20} \cdot x + \frac{6 \cdot 60}{20}$$
$$y \leq -x + 18$$

4. og til slutt det samme for Kim

$$y \leq -\frac{30}{12} \cdot x + \frac{8 \cdot 60}{12}$$

$$y \leq -\frac{5}{2}x + 40$$

b)



c)

Ser dette punktet i grafen på deloppgave b;

$$250x + 300y$$

$$250 \cdot 10 + 300 \cdot 8 = 4900$$

d)

Vi ser at den rette linja skjærer y_4 (Kim) utenfor det dekkede området, derfor setter vi

$$y_4 = 8$$

$$-\frac{5}{2}x + 40 = 8$$

$$\frac{5}{2}x = 32$$

$$x = \frac{32}{\frac{5}{2}} = \frac{64}{5}$$

slik at Δx blir

$$\frac{64}{5} - 10 = \frac{14}{5}$$

som han kunne brukt

$$\frac{14}{5} \cdot 30 = 84$$

minutter på ryddearbeidet. (1t 24m).

Dersom du er interessert, finner du flere løsningsforslag på eksamensoppgaver.org

SLUTT