

Løsningsforslag
Matematikk 2MX - AA6516 - 9. mai 2007

eksamensoppgaver.org

September 17, 2008

Om løsningsforslaget

Løsningsforslaget for matematikk eksamen i 2MX er gratis, og det er lastet ned på eksamensoppgaver.org. Løsningen er myntet på elever og privatister som vil forbrede seg til eksamen i matematikk. Lærere må gjerne bruke løsningsforslaget i undervisningsøyemed, men virksomheter har ingen rett til å anvende dokumentet.

Løsningsforslagene skal utelukkende distribueres fra nettstedet eksamensoppgaver.org, da det er viktig å kunne føye til og rette eventuelle feil i ettertid. På den måten vil alle som ønsker det, til enhver tid finne det siste oppdaterte verket. eksamensoppgaver.org ønsker videre at flest mulig skal få vite om eksamensløsningene, slik at det finnes et eget nettsted hvor man kan tilegne seg dette gratis.

Dersom du sitter på ressurser du har mulighet til å dele med deg, eller ønsker å bidra på annen måte, håper eksamensoppgaver.org på å høre fra deg.



Innholdsfortegnelse

oppgave 1	4
a.I)	4
a.II)	4
b.I)	5
b.II)	5
c.I)	6
c.II)	6
d.I)	6
d.II)	7
e.I.1)	7
e.I.2)	7
e.II.1)	8
e.II.2)	8
oppgave 2	9
a)	9
b)	9
c.1)	9
c.2)	10
d.1)	10
d.2)	10
oppgave 3	11
a)	11
b)	11
c)	11
d)	11
oppgave 4	12
a)	12
b)	12
b)	12
c)	12
oppgave 5	13
a)	13
b.1)	14
b.2)	15
c)	15
d)	16

oppgave 1

a.I)

$$\sqrt{2x - 3} = x - 3$$

kvadrerer

$$\begin{aligned} 2x - 3 &= (x - 3)^2 \\ 2x - 3 &= x^2 - 6x + 9 \\ x^2 - 8x + 12 &= 0 \end{aligned}$$

abc formelen

$$\begin{aligned} x &= \frac{-(-8) \pm \sqrt{(-8)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 12}}{2 \cdot 1} \\ x &= \frac{8 \pm 4}{2} \\ x_1 &= 2 \quad \vee \quad x_2 = 6 \end{aligned}$$

Kontrollerer svarene ved å sette prøve. Først for x_1

$$\begin{aligned} \sqrt{2 \cdot (2) - 3} &= 2 - 3 \\ 1 &= 1 \end{aligned}$$

og x_2

$$\begin{aligned} \sqrt{2 \cdot 6 - 3} &= 6 - 3 \\ \sqrt{9} &= 3 \\ 3 &= 3 \end{aligned}$$

Begge løsningene er 'ekte'.

a.II)

$$\begin{aligned} x &= \sqrt{3x + 7} - 1 \\ x + 1 &= \sqrt{3x + 7} \end{aligned}$$

kvadrerer

$$\begin{aligned} (x + 1)^2 &= 3x + 7 \\ x^2 + 2x + 1 - 3x - 7 &= 0 \\ x^2 - x - 6 &= 0 \end{aligned}$$

abc formelen

$$\begin{aligned} x &= \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{2 \cdot 1} \\ x &= \frac{1 \pm \sqrt{25}}{2} \end{aligned}$$

$$x = \frac{1 \pm 5}{2}$$

$$x_1 = -2 \quad \vee \quad x_2 = 3$$

Setter prøve for x_1

$$-2 = \sqrt{3 \cdot (-2) + 7} - 1$$

$$-2 \neq 0$$

Setter prøve for x_2

$$3 = \sqrt{3 \cdot 3 + 7} - 1$$

$$3 = \sqrt{16} - 1$$

$$3 = 3$$

x_2 er en ekte løsning, x_1 derimot, er falsk.

b.I)

$$3.0 \cdot 1.09^x = 9.5$$

$$1.09^x = \frac{9.5}{3.0}$$

$$x = \frac{\ln(9.5) - \ln(3.0)}{\ln(1.09)}$$

Dette er svaret på eksakt form.

b.II)

$$(\lg x)^2 - 2 \lg x - 3 = 0$$

abc formelen

$$\lg x = \frac{-(-2) \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)}}{2 \cdot 1}$$

$$\lg x = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 12}}{2}$$

$$\lg x = \frac{2 \pm 4}{2}$$

Husk at $\lg x \geq 0$, derfor

$$\lg x = 3 \quad \vee \quad \lg x = \cancel{-1}$$

$$x = 10^3 = 1000$$

c.I)

$$f(x) = \ln(3x)$$

Bruker kjerneregelen

$$f'(x) = (\ln(3x))' \cdot (3x)'$$

$$f'(x) = \frac{1}{3x} \cdot 3$$

$$f'(x) = \frac{1}{x}$$

c.II)

$$g(x) = x \cdot e^{-2x}$$

For å derivere her, må vi ta i bruk produkt- og kjerneregelen.

$$g'(x) = (x)' \cdot e^{-2x} + x \cdot (e^{-2x})' \cdot (-2x)'$$

$$g'(x) = e^{-2x} - 2xe^{-2x}$$

$$g'(x) = (1 - 2x) \cdot e^{-2x} = \frac{1 - 2x}{e^{2x}}$$

d.I)

Mellom linjene $x = -1$ og $x = 0$, ser vi at den lineære grafen stiger fra $y = 0$ til $y = 1$. Altså har vi

$$a = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-1 - 0}{0 - 1} = 1$$

Grafen går også gjennom punktet $(0, 1)$ og vi har funnet integranden

$$f(x) = x + 1$$

slik at

$$\int_{-1}^0 (x + 1) dx = \frac{1}{2}x^2 + x \Big|_{-1}^0 = F(0) - F(-1) = 0 - \left(\frac{1}{2} \cdot (-1)^2 - 1 \right) = \frac{1}{2}$$

d.II)

Ser at grafen til $f(x)$ består av tre forskjellige lineære funksjoner. Vi definerer definisjonsmengden for de respektive funksjonene slik

$$g(x) \quad x \in [-4, -3]$$

$$h(x) \quad x \in [-3, 1]$$

$$i(x) \quad x \in [1, \rightarrow)$$

Så definerer vi først $g(x)$

$$a_g = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{-2 - 0}{-3 - (-4)} = -2$$

og at den går igjennom punktet $(-3, -2)$ og nytter ettpunktsformelen

$$g(x) - (-2) = -2(x - (-3))$$

$$g(x) + 2 = -2x - 6$$

$$g(x) = -2x - 8$$

Definerer ikke $h(x)$ da vi definerte $h(x) = f(x)$ som nedenfor i oppgave d.II)

$$h(x) = x + 1$$

og til slutt vil vi finne $i(x)$

$$a_i = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{0 - 2}{4 - 1} = -\frac{2}{3}$$

og går gjennom punktet $(1, 2)$

$$i(x) - 2 = -\frac{2}{3}(x - 1)$$

$$i(x) = -\frac{2}{3}x + \frac{8}{3}$$

Og integrerer følgende på lommeregneren

$$\int_{-4}^{-3} (-2x - 8) dx + \int_{-3}^1 (x + 1) dx + \int_1^4 \left(-\frac{2}{3}x + \frac{8}{3}\right) dx = 2$$

e.I.1)

Går inn på 'EQUA' velger 'Polynomial', så '3' for tredjegradspolynom, skriver inn koeffesientene og trykker 'SOLVE'. Får da opp to løsninger, henholdsvis $(0, 0)$ og $(0, 3)$

e.I.2)

Skriver inn funksjonsuttrykket under 'GRAPH', tegner funksjonen og velger 'G-SOLVE' deretter 'MAX' og 'MIN'. Dette gir punktene $(0, 0)$ og $(2, -4)$

e.II.1)

Vil finne nullpunktene på grafen til

$$f(x) = x^3 - 3x^2$$

ved regning

$$x^3 - 3x^2 = 0$$

$$x^2(x - 3) = 0$$

$$x = 0 \quad \vee \quad x = 3$$

dermed $(0, 0)$ og $(0, 3)$

e.II.2)

Vil finne topp- og bunnpunkter på den samme grafen ved regning.

$$f'(x) = (x^3)' - 3(x^2)'$$

$$f'(x) = 3x^2 - 6x$$

Og setter

$$f'(x) = 0$$

$$3x^2 - 6x = 0$$

$$3x(x - 2) = 0$$

$$3x = 0 \quad \vee \quad x - 2 = 0$$

$$x = 0 \quad \vee \quad x = 2$$

Finner y -koordinatene

$$f(0) = 0$$

$$f(2) = (2)^3 - 3 \cdot (2)^2 = 8 - 12 = -4$$

dermed har vi topp-punktet $(0, 0)$ og bunnpunktet $(2, -4)$

oppgave 2

a)

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{OB} = [4 - 0, 2 - 0] = [4, 2] \\ \overrightarrow{CD} &= -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB} = -\frac{1}{2}[4, 2] = [-2, -1]\end{aligned}$$

BILDE INN HER Som vi ser på bildet, er \overrightarrow{CD} tegnet inn. Videre er $\overrightarrow{AB} \parallel \overrightarrow{CD}$ dette gjelder ikke linjestykkene AD og BC dermed har vi et trapes.

b)

$$\overrightarrow{BC} = [2 - 4, 6 - 2] = [-2, 4]$$

Kontrollerer om $\overrightarrow{BC} \perp \overrightarrow{AB}$

$$\begin{aligned}[-2, 4] \cdot [4, 2] \\ -8 + 8 \\ 0\end{aligned}$$

Ja, de to vektorene er ortogonale siden skalarproduktet (dottproduktet) er null.

c.1)

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AP} &= \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{5}{4}\overrightarrow{AD} \\ \overrightarrow{AP} &= \frac{2}{3}[4, 2] + \frac{5}{4}[0, 5] \\ \overrightarrow{AP} &= \left[\frac{8}{3}, \frac{4}{3}\right] + \left[0, \frac{25}{4}\right] \\ \overrightarrow{AP} &= \left[\frac{8}{3}, \frac{91}{12}\right]\end{aligned}$$

Altså har vi $P\left(\frac{8}{3}, \frac{91}{12}\right)$

c.2)

Kontrollerer om A , C og P ligger på en rett linje ved å lage en parameterfremstilling for ei linje l med retningsvektoren $\overrightarrow{AC} = [2, 6]$

$$l: \quad x = 2t \quad \wedge \quad y = 6t$$

Sjekker om P ligger på l .

$$\begin{aligned} \frac{8}{3} = 2t & \quad \wedge \quad y = 6t \\ t = \frac{4}{3} & \quad \rightarrow \quad y = 6 \cdot \frac{4}{3} \\ & \quad \quad \quad y = 8 \end{aligned}$$

Konkluderer med at punktene ikke ligger på ei rett linje.

d.1)

Siden Q er bestemt av vektor $x \cdot \overrightarrow{AD}$ vet vi at komponenten $\vec{e}_x = 0$. Dermed vil vi finne punktet Q ett eller annet sted på y -aksen. Ser vi på den andre gitte sammenhengen, vil dette punktet ligge $\overrightarrow{AB} + y \cdot \overrightarrow{BC}$ altså når $y \cdot \overrightarrow{BC}$ krysser y -aksen fra punktet B . Vektoren som viser dette, er farget i **grønt** på figuren til høyre. $Q(0, 10)$

d.2)

Ved regning

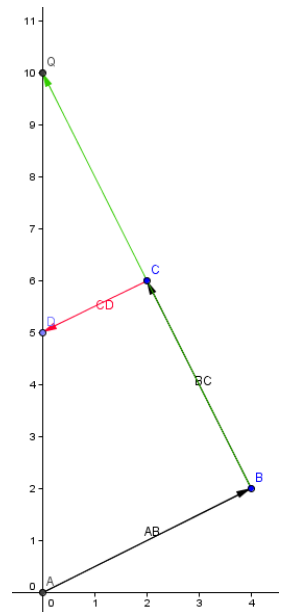
$$x \cdot \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + y \cdot \overrightarrow{BC}$$

Vi får et likningssett der

$$\begin{aligned} 0 = 4 - 2y & \quad \wedge \quad 5x = 2 + 4y \\ y = 2 & \quad \rightarrow \quad 5x = 2 + 4 \cdot 2 \\ & \quad \quad \quad 5x = 10 \\ & \quad \quad \quad x = 2 \end{aligned}$$

Altså

$$\begin{aligned} \overrightarrow{AQ} = \overrightarrow{OQ} = x \cdot \overrightarrow{AD} &= 2 \cdot [0, 5] = [0, 10] \\ \Rightarrow & \quad Q(0, 10) \end{aligned}$$



oppgave 3

a)

- Volleyballag: 6 spillere
- Gutter: 13
- Jenter: 15

$$P(3J \cap 3G) = \frac{\binom{15}{3} \cdot \binom{13}{3}}{\binom{28}{3}} = \frac{455 \cdot 286}{376740} = \frac{143}{414} \approx 34.5\%$$

b)

$$P(G = x) = \frac{\binom{15}{6-x} \cdot \binom{13}{x}}{\binom{28}{6}} \quad x \in [0, 6]$$

c)

Finner sannsynlighetene ved å sette inn funksjonsuttrykket i b) under 'TABLE' på lommeregneren. Velger deretter 'RANG' fra 0 til 6 og 'PITCH' 1. Tallene i tabellen er rundet av til 4 desimaler.

x	$P(G = x)$
0	0.0132
1	0.1036
2	0.2826
3	0.3454
4	0.1993
5	0.0513
6	0.0046
Sum	1

d)

Vi finner når det er minst fire gutter slik

$$P(G \geq 4) = \sum_{x=4}^6 \frac{\binom{15}{6-x} \cdot \binom{13}{x}}{\binom{28}{6}} \approx 25.5\%$$

Denne sannsynligheten kan vi finne på flere måter, men jeg valgte å summere verdiene fra tabellen i c).

oppgave 4

a)

$$\ln y = 0.26 \cdot (33) - 7.5$$

$$\ln y = 1.08$$

$$y = e^{1.08} \approx 2.94$$

Da er hyppigheten 2.94

b)

$$y = 25$$

$$0.26x - 7.5 = \ln(25)$$

$$0.26x = \ln 25 + 7.5$$

$$x = \frac{\ln 25 + 7.5}{0.26} \approx 41$$

Hyppigheten er 25 for kvinner som er cirka 41 år gamle.

b)

$$\ln y = 0.26x - 7.5$$

$$y = e^{0.26x - 7.5}$$

$$y = e^{0.26x} \cdot e^{-7.5}$$

$$y = e^{-7.5} \cdot e^{0.26x}$$

$$y \approx 0.00055 \cdot e^{0.26x}$$

c)

$$y' = 0.00055 \cdot (e^{0.26x})' \cdot (0.26x)'$$

$$y' = 0.00055 \cdot 0.26 \cdot e^{0.26x}$$

$$y' = 0.00143 \cdot e^{0.26x}$$

dermed

$$y' = 0.00143 \cdot e^{0.26 \cdot 40} \approx 4.70$$

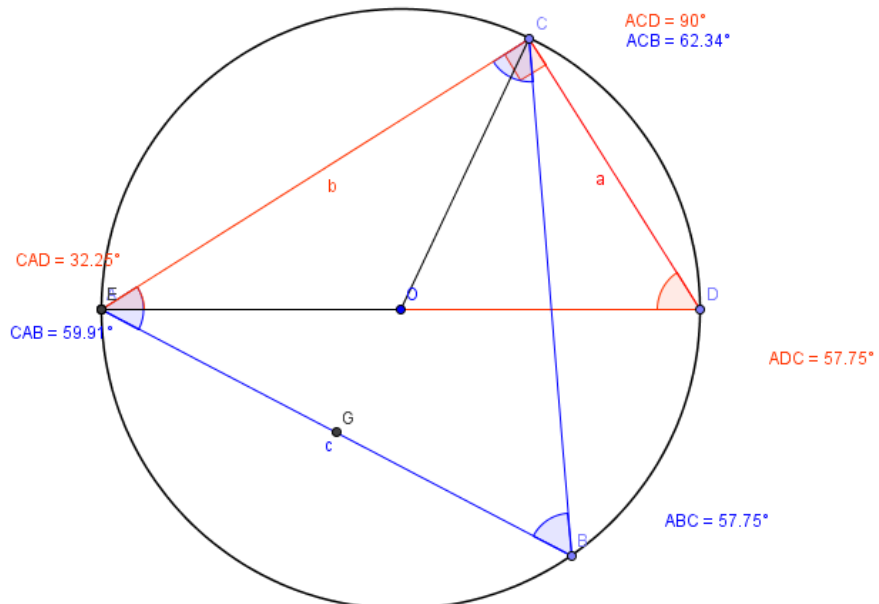
Etter kvinner har fylt 40 år, stiger hyppigheten for å få en unge med downssyndrom med hele 4.70 prosent.

oppgave 5

a)

- Vi får oppgitt at $\angle AOC$ er sentralvinkelen til periferivinkelen $\angle ADC$.
- Sentralvinkelen er alltid dobbelt så stor som periferivinkelen.
- Vi kan observere at $\angle B$ har den samme sentralvinkelen som $\angle ADC$.
- Derfor er $\angle B = \angle ADC$

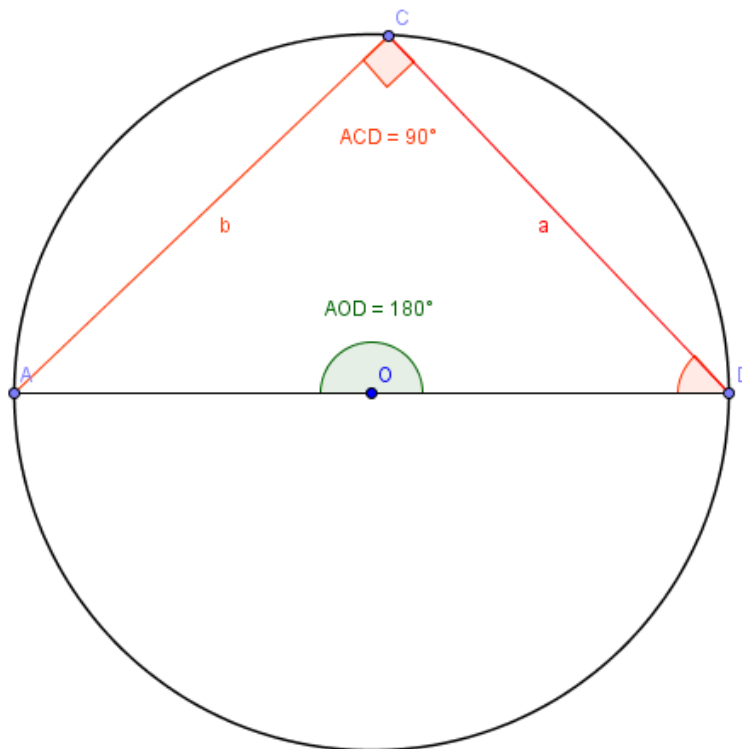
Nedenfor ser du en fremstillingen som viser sammenhengen tydeligere.



b.1)

- Vi ser på periferivinkelen $\angle ACD$
- Denne har sentralvinkel $\angle AOD$
- $\angle AOD = 180^\circ$
- $\angle ACD = \frac{1}{2} \cdot \angle AOD = 90^\circ$

Legg merke til hvordan dette alltid er sant uavhengig av hvor vi plasserer C på vinkelen



b.2)

- Fra a) har vi at $\angle B = \angle ADC$
- Fra b.1) har vi at $\angle ACD = 90^\circ$

$$\sin(\angle ADC) = \frac{b}{AD}$$

der AD er diameteren i vinkelen, og dermed $2R$

$$\sin(\angle ADC) = \frac{b}{2R}$$

Og som nevnt, har vi fra a) at $\angle B = \angle ADC$

$$\sin(\angle B) = \frac{b}{2R}$$

c)

Fra b)

$$\sin(\angle B) = \frac{b}{2R}$$

dermed

$$2R \cdot \sin(\angle B) = b$$

$$\frac{b}{\sin(\angle B)} = 2R$$

av sinussetningen har vi at

$$\frac{a}{\sin(\angle A)} = \frac{b}{\sin(\angle B)} = \frac{c}{\sin(\angle C)} = 2R$$

d)

Vi har arealformelen for trekanter

$$A = \frac{1}{2} \cdot bc \cdot \sin(\angle A) = \frac{1}{2} ac \sin(\angle C)$$

så

$$\frac{2}{abc} \cdot \frac{1}{2} \cdot bc \cdot \sin(\angle A) = \frac{1}{2} ab \sin(\angle C) \cdot \frac{2}{abc}$$
$$\frac{\sin(\angle A)}{a} = \frac{\sin(\angle C)}{c}$$

snur om på begge sider

$$\frac{a}{\sin(\angle A)} = \frac{c}{\sin(\angle C)}$$

Fra c) vet vi at:

$$\frac{c}{\sin(\angle C)} = 2R$$
$$\sin(\angle C) = \frac{c}{2R}$$

dermed

$$A = \frac{1}{2} \cdot ab \cdot \sin(\angle C) = \frac{1}{2} \cdot ab \cdot \frac{c}{2R}$$
$$A = \frac{abc}{4R}$$

Dersom du er interessert, finner du flere [løsningsforslag](http://losningsforslag.paaeksamensopp-gaver.org) på eksamensopp-gaver.org

SLUTT