

Løsningsforslag
Eksamen 2MX - AA6516 - 28.05.2008

eksamensoppgaver.org

September 13, 2008

Om løsningsforslaget

Løsningsforslaget for matematikk eksamen i 2MX er gratis, og det er lastet ned på eksamensoppgaver.org. Løsningen er myntet på elever og privatister som vil forbrede seg til eksamen i matematikk. Lærere må gjerne bruke løsningsforslaget i undervisningsøyemed, men virksomheter har ingen rett til å anvende dokumentet.

Løsningsforslagene skal utelukkende distribueres fra nettstedet eksamensoppgaver.org, da det er viktig å kunne føye til og rette eventuelle feil i ettertid. På den måten vil alle som ønsker det, til enhver tid finne det siste oppdaterte verket. eksamensoppgaver.org ønsker videre at flest mulig skal få vite om eksamensløsningene, slik at det finnes et eget nettsted hvor man kan tilegne seg dette gratis.

Dersom du sitter på ressurser du har mulighet til å dele med deg, eller ønsker å bidra på annen måte, håper eksamensoppgaver.org på å høre fra deg.

Innholdsfortegnelse

1 oppgave 1	4
1.1 a.1.I)	4
1.2 a.1.II)	4
1.3 a.2.I)	4
1.4 a.2.II)	4
1.5 b.1.I)	5
1.6 b.1.II)	5
1.7 b.2.I)	5
1.8 b.2.II)	5
1.9 c.I)	5
1.10 c.II)	6
1.11 d.I)	6
1.12 d.II)	6
1.13 e.I)	6
1.14 e.II)	7
1.15 f)	7
2 oppgave 2	8
2.1 a)	8
2.2 b)	8
2.3 c)	8
2.4 d)	8
3 oppgave 3	9
3.1 a)	9
3.2 b)	10
3.3 c)	11
3.4 d)	11
4 oppgave 4	13
4.1 a)	13
4.2 b)	13
4.3 c)	13
4.4 d)	13
5 oppgave 5	14
5.1 a)	14
5.2 b)	14
5.3 c)	14
5.4 d)	15
5.5 e)	15
5.6 f)	16

1 oppgave 1

1.1 a.1.I)

$$\begin{aligned} 3^x &= 27 \\ x \ln 3 &= \ln 27 \\ x &= \frac{\ln 27}{\ln 3} \\ x &= 3 \end{aligned}$$

1.2 a.1.II)

$$\begin{aligned} 10^{x^2} &= 10^x \\ \log(10^{x^2}) &= \log(10^x) \\ x^2 &= x \\ x(x-1) &= 0 \\ x = 0 \quad \vee \quad x &= 1 \end{aligned}$$

1.3 a.2.I)

$$\sqrt{x+3} = 2$$

Kvadrerer

$$\begin{aligned} x+3 &= 2^2 \\ x &= 1 \end{aligned}$$

Setter ikke prøve, for jeg ser at svaret er riktig, men husk å sette prøve på alle likninger der du kvadrerer.

1.4 a.2.II)

$$\sqrt{3x+7} - x = 1 \tag{1}$$

Kvadrerer

$$\begin{aligned} (\sqrt{3x+7})^2 &= (1+x)^2 \\ 3x+7 &= x^2+2x+1 \end{aligned}$$

abc-formel

$$\begin{aligned} x^2 - x - 6 &= 0 \\ x_1 = 3 \quad \vee \quad x_2 &= -2 \end{aligned}$$

Merk at høyre side (HS) i (1) er lik 1. Setter prøve for x_1

$$\sqrt{3 \cdot 3 + 7} - 3 = \sqrt{16} - 3 = 4 - 3 = 1$$

og for x_2

$$\begin{aligned} \sqrt{3 \cdot (-2) + 7} - (-2) &= 1 + 2 \neq 1 \\ x &= 3 \end{aligned}$$

1.5 b.1.I)

$$\begin{aligned}f(x) &= 2x^3 - 5x^2 \\f'(x) &= 2 \cdot (x^3)' - 5 \cdot (x^2)' \\f'(x) &= 6x^2 - 10x\end{aligned}$$

1.6 b.1.II)

$$\begin{aligned}f(x) &= x \cdot \ln x \\f'(x) &= (x)' \cdot \ln x + x \cdot (\ln x)' \\f'(x) &= \ln x + \cancel{x} \frac{1}{\cancel{x}} \\f'(x) &= \ln x + 1\end{aligned}$$

1.7 b.2.I)

$$\begin{aligned}g(x) &= 5e^{2x} \\g'(x) &= 5 \cdot (e^{2x})' \\g'(x) &= 5 \cdot 2 \cdot e^{2x} \\g'(x) &= 10e^{2x}\end{aligned}$$

1.8 b.2.II)

$$\begin{aligned}g(x) &= \frac{e^{2x}}{x^2} \\g'(x) &= \frac{((x^2)' \cdot e^{2x}) - (x^2 \cdot (e^{2x})')}{x^{2 \cdot 2}} \\g'(x) &= \frac{2x \cdot e^{2x} - x^2 \cdot 2 \cdot e^{2x}}{x^4} \\g'(x) &= \frac{2(e^{2x} - xe^{2x})}{x^3}\end{aligned}$$

1.9 c.I)

$$\int_1^3 8x^3 dx = \left[8 \cdot \frac{1}{4} x^4 \right]_1^3 = [2x^4]_1^3 = (2 \cdot (3)^4) - (2 \cdot (1)^4) = 160$$

1.10 c.II)Bestem t i likningen

$$\int_1^t 9x^2 dx = 78$$

$$\int 9x^2 dx = F(x) = 3x^3$$

$$F(t) - F(1) = 78$$

$$F(t) = 78 + F(1)$$

$$3t^3 = 81$$

$$t^3 = 27$$

$$t = 3$$

1.11 d.I)

$$P(16) = \binom{20}{16} 0.75^{16} \cdot 0.25^4 \approx 0.1897 = 18.97\%$$

1.12 d.II)

$$P(\geq 16) = 1 - \sum_{k=0}^{15} \binom{20}{k} \cdot (0.75)^k \cdot (1 - 0.75)^{20-k} \approx 41.48\%$$

Kort forklaring av uttrykket: Σ betyr sum. Vi summerer altså sannsynligheten fra 0 frø spirer til 15 frø spirer. Minst 16 frø spirer, er den komplementære sannsynligheten (den motsatte) for at 0, 1, 2, ..., 15 frø spirer, og derfor blir uttrykket 1-summen av sannsynlighetene.

1.13 e.I)Undersøk om vektorene $\vec{u} = 2\vec{a} + 3\vec{b}$ og $\vec{v} = 3\vec{a} + 2\vec{b}$ er parallelle.

$$\frac{2}{3} \neq \frac{3}{2}$$

De er ikke parallelle.

1.14 e.II)

Undersøk om det finnes tall, t , slik at vektorene $\vec{u} \parallel \vec{v}$ når; $\vec{u} = (t+1)\vec{a} + 2\vec{b}$ og $\vec{v} = -5\vec{a} - (t-2)\vec{b}$

$$\frac{(t+1)}{-5} = \frac{2}{-(t-2)}$$

Skriver om nevneren på høyresiden, for $-(t-2) \Leftrightarrow (2-t)$

$$\frac{(t+1)}{-5} = \frac{2}{(2-t)}$$

Kryssmultipliserer

$$(2-t)(t+1) = 2 \cdot (-5)$$
$$-t^2 + t + 12 = 0$$

abc-formel

$$t_1 = -3 \quad \vee \quad t_2 = 4$$

Ja, $\vec{u} \parallel \vec{v}$ for $t = \{-3, 4\}$

1.15 f)

Her er det bare å være kreativ selv. :)

2 oppgave 2

2.1 a)

Hendelsen $N_1 \cap N_2$ betyr 'eleven strøk i norsk hovedmål og sidemål'. $P(N_1 \cap N_2)$ er oppgitt i oppgaveteksten. Den sier

$$P(N_1 \cap N_2) = 0.04$$

2.2 b)

Hendelsene N_1 og N_2 er ikke uavhengige, for at to hendelser skal være uavhengige, må $P(N_1|N_2) = P(N_1)$

$$P(N_1|N_2) \neq P(N_1)$$

Altså er dette avhengige hendelser.

2.3 c)

$N_2|N_1$ kan være den relative frekvensen for at N_2 inntreffer, gitt at N_1 har intruffet.

$$P(N_2|N_1) = \frac{P(N_1 \cap N_2)}{P(N_1)} = \frac{0.04}{0.07} \approx 0.571 = 57.1\%$$

2.4 d)

Som relativ frekvens

$$P(N_1|N_2) = \frac{P(N_1 \cap N_2)}{P(N_2)} = \frac{0.04}{0.12} = 0.\bar{3} \approx 33.3\%$$

Ved å bruke Bayes' setning

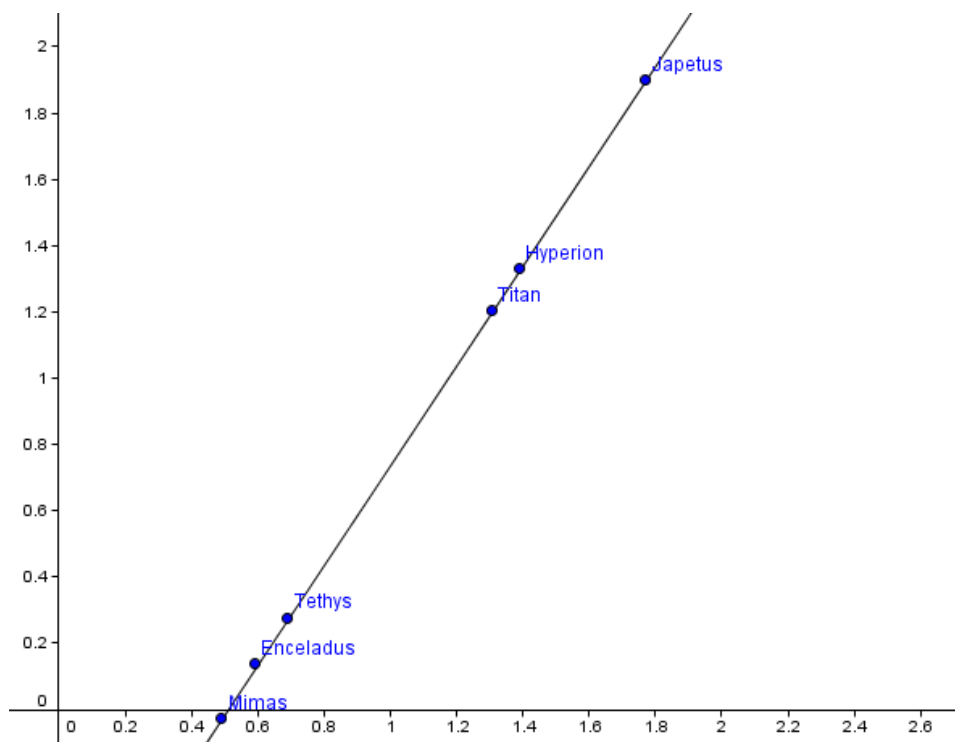
$$P(N_1|N_2) = \frac{P(N_1) \cdot P(N_2|N_1)}{P(N_1) \cdot P(N_2|N_1) + P(\bar{N}_1) \cdot P(N_2|\bar{N}_1)}$$
$$P(N_1|N_2) = \frac{0.07 \cdot 0.571}{(0.07 \cdot 0.571) + (0.93 \cdot 0.043)} = 0.4998 \approx 50.0\%$$

3 oppgave 3

3.1 a)

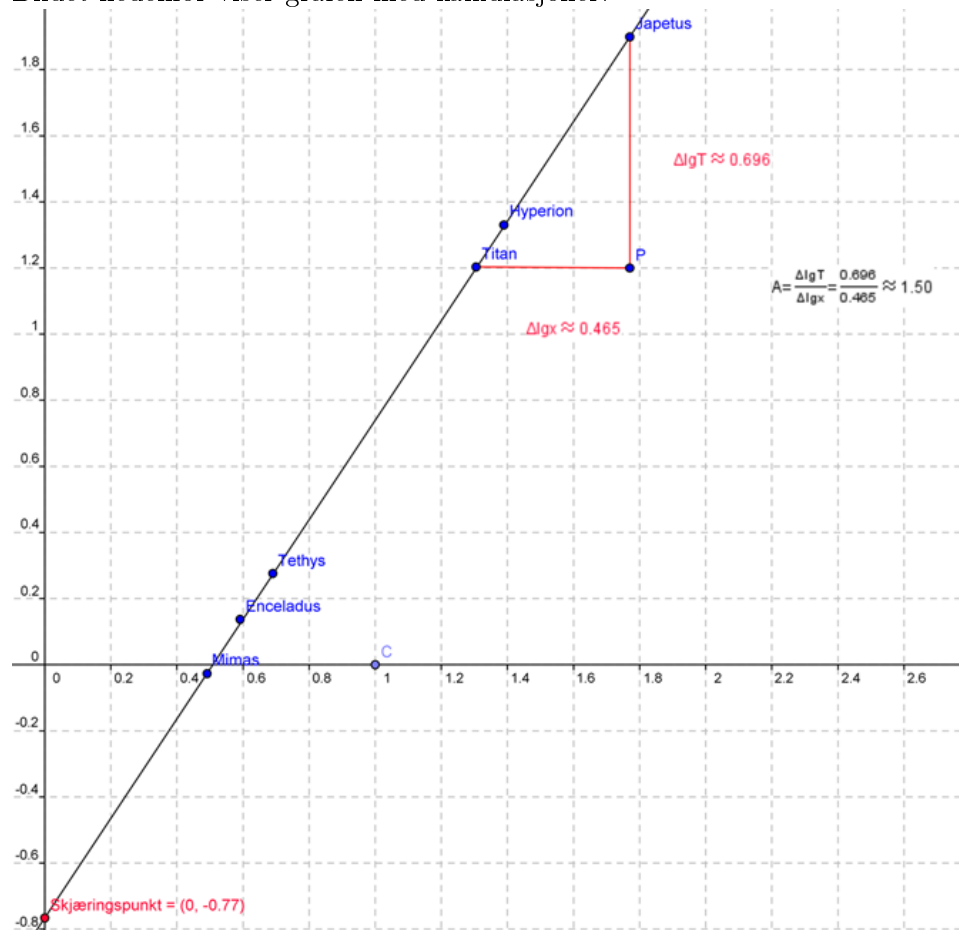
$\lg x$ og $\lg T$ er rundet av til tre desimaler i tabellen nedenfor. Mellomregninger i de andre oppgavene er gjort med fullstendige tall på lommeregneren.

Navn	Avstanden x målt i saturnradier	Omløpstiden T målt i døgn	$\lg x$	$\lg T$
Mimas	3.1	0.94	0.491	-0.027
Enceladus	3.9	1.37	0.591	0.137
Tethys	4.9	1.89	0.690	0.276
Titan	20.2	15.95	1.305	1.203
Hyperion	24.5	21.28	1.389	1.328
Japetus	58.9	79.33	1.770	1.899



3.2 b)

Bildet nedenfor viser grafen med kalkulasjoner.



Jeg finner en bedre tilnæringsverdier for A og B ved å bruke regresjon på lommeregneren. Finner følgende:

$$y = ax + b$$

$$a \approx 1.5022$$

$$b \approx -0.7589$$

Vi har

$$y = 1.5022x - 0.7589$$

som vi vil skrive om på formen

$$T(x) = A \cdot x^B$$

så

$$T(x) = \lg y$$

gir

$$\lg y = \lg (1.5022x - 0.7589)$$

$$T(x) = 10^{\lg(1.5022x - 0.7589)}$$

$$T(x) = 10^{\lg 1.5022x} \cdot 10^{-0.7589}$$

ferdig avrundet

$$T(x) = 0.17x^{1.5}$$

3.3 c)

Dione har omløpstiden 2.74 døgn, vi vil finne avstanden fra Dione til Saturn.

$$T(x) = 2.74$$

$$0.17x^{1.5} = 2.74$$

$$x^{1.5} = \frac{2.74}{0.17}$$

$$x = \sqrt[1.5]{\frac{2.74}{0.17}}$$

$$x \approx 6.38$$

Omløpstiden til Dione er cirka 6.38 døgn.

3.4 d)

Vi vil undersøke om

$$T(x) = 0.17x^{1.5} \tag{2}$$

kan skrives på formen

$$\frac{x^3}{T^2} = k \tag{3}$$

der k er en konstant.

Vi setter inn (1) i (2) for å undersøke.

$$\frac{x^3}{(0.17x^{1.5})^2} = \frac{x^3}{0.17^2 \cdot x^{(1.5) \cdot 2}} = \frac{x^3}{0.17^2 x^3} = \frac{1}{0.17^2} \approx 34.602$$

For å kontrollere om dette er en konstant, velger vi ut verdiene for to måneder fra tabellen i eksamensoppgaven. Jeg velger Mimas og Titan.

Først regner vi ut for Mimas

$$\frac{3.1^3}{0.94^2} \approx 33.715$$

deretter for Titan

$$\frac{20.2^3}{15.95^2} \approx 32.399$$

Observerer at verdiene ikke er 100% i tråd med hverandre, og at k ikke er konstant for disse verdiene. Dette er fordi vi gjort avrundinger for å komme frem til funksjonsuttrykket, og at eksamensforfatteren helt sikkert også har gjort avrundinger i tabellen. - Du kan lese mer om [Keplers tredje lov](#) på Wikipedia.

4 oppgave 4

4.1 a)

$$A(3) = 3 - 1 - \ln(3) \approx 0.901 \Big| \cdot 100 \text{ enheter}$$

Den tredje dagen, var salget omlag 90 enheter.

4.2 b)

$$\begin{aligned} A(x) &= x - 1 - \ln x \\ A'(x) &= (x)' - (1)' - (\ln x)' \\ A'(x) &= 1 - 0 - \frac{1}{x} \\ A'(x) &= 1 - \frac{1}{x} \end{aligned}$$

Grafen til $A'(x)$ stiger med tiden i hele intervallet. Det blir stadig flere salg per dag, og kampanjen er en braksuksess!

4.3 c)

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{2}x^2 - x \cdot \ln x \\ f'(x) &= \frac{1}{2} \cdot (x^2)' ((x)' \cdot \ln x) + (x \cdot (\ln x)') \\ f'(x) &= x - \left(\ln x + x \frac{1}{x} \right) \\ f'(x) &= x - \ln x - 1 \end{aligned}$$

$f'(x)$ er den antideriverte til $A(x)$

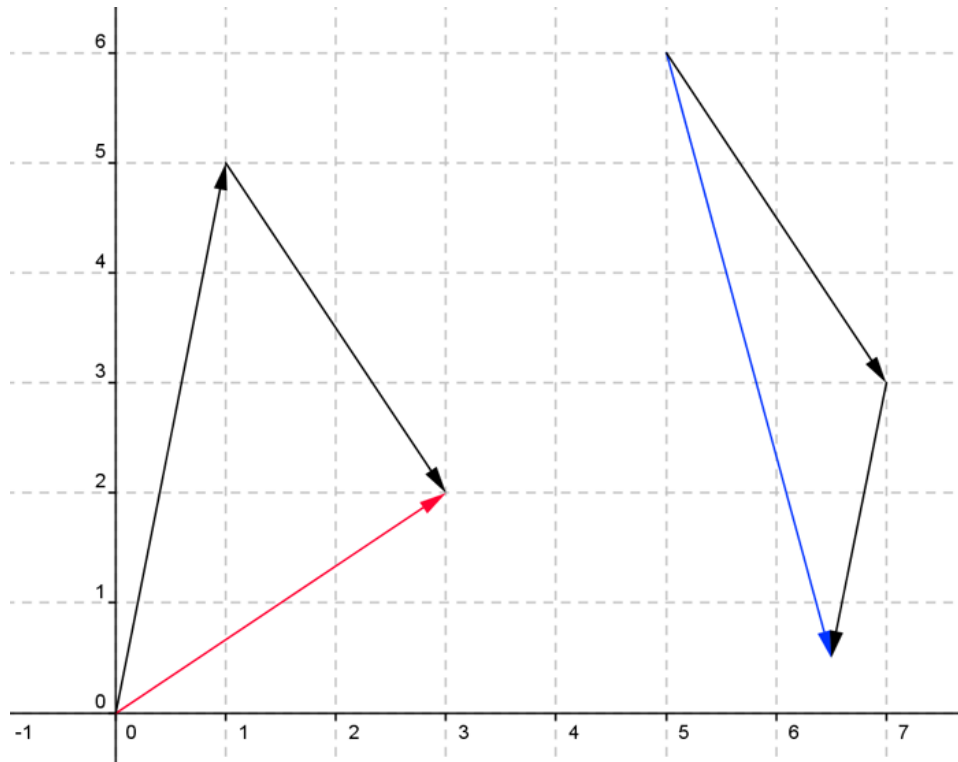
4.4 d)

$$\begin{aligned} \int_1^{11} A(x) dx &= \left[\frac{1}{2}x^2 - x \cdot \ln x \right]_1^{11} = \\ \left(\frac{1}{2} \cdot (11)^2 - 11 \cdot \ln(11) \right) - \left(\frac{1}{2} \cdot (1)^2 - 1 - \ln(1) \right) &= 47.102 - (-0.5) = 47.602 \\ 47.602 \Big| \cdot 100 \text{ enheter} &\approx 4760 \text{ enheter} \end{aligned}$$

Fra dag 1 til 11, var totalt salg tilnærmet 4760 enheter.

5 oppgave 5

5.1 a)



På tegningen ovenfor, ser du $\vec{a} - \vec{b}$ og $\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$ tegnet inn i et kartesisk koordinatsystem.

5.2 b)

$\vec{a} = [2, -3]$ fordi komponenten \vec{e}_x går 2 trinn i positiv retning, mens \vec{e}_y går tre trinn i negativ retning. Vi ser av tegningen at komponentene til \vec{b} defineres slik; $\vec{b} = [-1, -5]$

5.3 c)

$$\begin{aligned} & \vec{a} \cdot (\vec{a} - \vec{b}) \\ & [2, -3] ([2, -3] - [-1, -5]) \\ & [2, -3] \cdot [3, 2] \\ & 6 - 6 \\ & 0 \end{aligned}$$

Da skalarproduktet er null, har vi påvist ortogonalitet, $\vec{a} \perp (\vec{a} - \vec{b})$

5.4 d)

Når vi vet at l er parallell med \vec{a} , og går gjennom punktet $(2, 5)$, så kan vi sette det opp på følgende måte:

$$[x, y] = [2, 5] + [2, -3]t$$

Da får vi parameterfremstillingen

$$l : \quad x = 2 + 2t \quad \wedge \quad y = 5 - 3t$$

Vi skjærer y-aksen, når $x = 0$

$$\begin{array}{lcl} 0 = 2 + 2t & \wedge & y = 5 - 3t \\ t = -1 & \rightarrow & y = 5 - 3(-1) \\ & \wedge & y = 8 \end{array}$$

og x-aksen når $y = 0$

$$\begin{array}{lcl} x = 2 + 2t & \wedge & 0 = 5 - 3t \\ x = 2 + 2\frac{5}{3} & \leftarrow & t = \frac{5}{3} \\ x = \frac{16}{3} & & \end{array}$$

Da har vi punktene $(0, 8)$ og $(\frac{16}{3}, 0)$

5.5 e)

$m \perp l$, og siden vi vet at retningsvektoren for l er \vec{a} og den står vinkelrett på $(\vec{a} - \vec{b})$ så kan vi benytte sistnevnte som retningsvektor for m

$$[x, y] = [3, 2] + [3, 2]s$$

$$m : \quad x = 3 + 3s \quad \wedge \quad y = 2 + 2s$$

Vil nå finne skjæringspunktene mellom l og m , så setter $l = m$

$$\begin{array}{lcl} 2 + 2t = 3 + 3s & \wedge & 5 - 3t = 2 + 2s \\ t = \frac{1+3s}{2} & \rightarrow & 5 - 3\left(\frac{1+3s}{2}\right) = 2 + 2s \\ & & 10 - 3(1 + 3s) = 4 + 4s \\ t = \frac{1+\frac{9}{13}}{2} & \leftarrow & s = \frac{3}{13} \\ t = \frac{11}{13} & & \end{array}$$

Deretter finner vi punktet ved å bruke parameterfremstillingen for l

$$\begin{aligned} x &= 2 + 2\left(\frac{11}{13}\right) = \frac{26 + 11}{13} = \frac{48}{13} \\ y &= 5 - 3\left(\frac{11}{13}\right) = \frac{65 - 33}{13} = \frac{32}{13} \end{aligned}$$

og bruker s for å kontrollere med parameterfremstillingen for m

$$x = 3 + 3 \left(\frac{3}{13} \right) = \frac{39 + 9}{13} = \frac{48}{13}$$

$$y = 2 + 2 \left(\frac{3}{13} \right) = \frac{26 + 6}{13} = \frac{32}{13}$$

De skjærer hverandre altså i punktet $(\frac{48}{13}, \frac{32}{13})$

5.6 f)

Siden n danner en 45° med x-aksen, så kan vi si at retningsvektoren er $[1, 1]$.

Da kan vi si

$$[x, y] = [1, 2] + [1, 1]k$$

$$n : \quad x = 1 + k \quad \wedge \quad y = 2 + k$$

Vil nå finne skjæringspunktene mellom l og n , så setter $l = n$

$$2 + 2t = 1 + k \quad \wedge \quad 5 - 3t = 2 + k$$

$$k = 1 + 2t \quad \rightarrow \quad 5 - 3t = 2 + (1 + 2t)$$

$$5 - 3t = 3 + 2t$$

$$5t = 2$$

$$k = 1 + 2 \left(\frac{2}{5} \right) \quad \leftarrow \quad t = \frac{2}{5}$$

$$k = \frac{9}{5}$$

Bestemmer punktene med parameterfremstillingen for l

$$x = 2 + 2 \left(\frac{2}{5} \right) = \frac{14}{5}$$

$$y = 5 - 3 \left(\frac{2}{5} \right) = \frac{19}{5}$$

Kontrollerer at dette også stemmer med parameterfremstillingen for n

$$x = 1 + \frac{9}{5} = \frac{14}{5}$$

$$y = 2 + \frac{13}{5} = \frac{19}{5}$$

Det stemmer, og vi vet nå at felles punkt for l og n er $(\frac{14}{5}, \frac{19}{5})$

Dersom du er interessert, finner du flere [løsningsforslag](http://losningsforslag.paa-eksamensoppgaver.org) på eksamensoppgaver.org

SLUTT