Løsningsforslag for Eksamen i Matematikk 3MX - Privatister - AA6526
16.05.2008

eksamensoppgaver.org

Om løsningsforslaget

Løsningsforslaget for eksamen i matematikke 3MX er gratis, og det er lastet ned på eksamensoppgaver.org. Løsningen er myntet på elever og privatister som vil forbrede seg til eksamen i matematikk. Lærere må gjerne bruke løsningsforslaget i undervisningsøyemed, men virksomheter har ingen rett til å anvende dokumentet.

Løsningsforslagene skal utelukkende distribueres fra nettstedet eksamensoppgaver.org, da det er viktig å kunne føye til og rette eventuelle feil i ettertid. På den måten vil alle som ønsker det, til enhver tid finne det siste oppdaterte verket. eksamensoppgaver.org ønsker videre at flest mulig skal få vite om eksamensløsningene, slik at det finnes et eget nettsted hvor man kan tilegne seg dette gratis.

Dersom du sitter på ressurser du har mulighet til å dele med deg, eller ønsker å bidra på annen måte, håper eksamensoppgaver.org på å høre fra deg.

Innholdsfortegnelse

oppgave 1

a)

$$f(x) = \tan\left(3x^2\right)$$

deriverer med kjerneregelen

$$f'(x) = \left(\tan\left(3x^2\right)\right)' \cdot \left(3x^2\right)'$$

$$f'(x) = 6x\left(\tan^2\left(3x^2\right) + 1\right)$$

b)

$$\int x^3 \cdot \ln x \, dx$$

Bruker delvis integrasjon og setter

$$u' = x^3 \quad \Rightarrow \quad u = \tfrac{1}{4}x^4$$

$$v' = \tfrac{1}{x} \quad \Rightarrow \quad v = \ln x$$

Da får vi;

$$\int x^3 \cdot \ln x \, dx = \frac{1}{4}x^4 \cdot \ln x - \frac{1}{4} \cdot \int x^{\cancel{4}} \cdot \frac{1}{\cancel{x}} \, dx$$

som medfører

$$\int x^3 \cdot \ln x \, dx = \frac{1}{4}x^4 \cdot \ln x - \frac{1}{4} \cdot \int x^3 \, dx$$

$$\int x^3 \cdot \ln x \, dx = \frac{1}{4}x^4 \cdot \ln x - \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4}x^4$$

$$\int x^3 \cdot \ln x \, dx = \frac{1}{4}x^4 \cdot \ln x - \frac{1}{16}x^4$$

Forenklet og med konstant

$$\int x^3 \cdot \ln x \, dx = \left(\ln x - \frac{1}{4}\right) \cdot \frac{1}{4}x^4 + C$$

c)

$$\sin x - \cos x = \frac{1}{2}$$

altså intet intervall oppgitt, og vi vil finne alle løsninger.

$$\sqrt{(1)^2 + (-1)^2} \cdot \sin\left(x + \arctan\left(\frac{-1}{1}\right)\right) = \frac{1}{2}$$

Her ser vi at ϕ ligger i 4 kvadrant

$$\sqrt{2} \cdot \sin\left(x - \arctan(1)\right) = \frac{1}{2}$$

$$\sqrt{2} \cdot \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2}$$

da var likningen skrevet om, og vi begynner å løse den

$$\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{2}}$$

$$\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$x - \frac{\pi}{4} = \arcsin\left(\frac{\sqrt{2}}{4}\right)$$

$$x - \frac{\pi}{4} \approx 0.3614 + 2k\pi \quad \vee \quad x - \frac{\pi}{4} \approx \pi - 0.3614 + 2k\pi \qquad k \in \mathbb{Z}$$

$$x \approx 1.147 + 2k\pi \quad \vee \quad x \approx 3.566 + 2k\pi$$

d.1)

$$f(x) = \sin x \cdot \cos x \qquad x \in [0, 2\pi\rangle$$

Finner først den førstederiverte ved å nytte produktregelen

$$f'(x) = (\sin x)' \cdot (\cos x)' + \sin x \cdot (\cos x)'$$

$$f'(x) = \cos x \cdot \cos x + \sin x \cdot (-\sin x)$$

$$f'(x) = \cos^2 x - \sin^2 x$$

som vi vet er

$$f'(x) = \cos(2x)$$

dermed

$$f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(2 \cdot \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0$$

d.2)

Deriverer $f'(x)$

$$f''(x) = (\cos(2x))' \cdot (2x)'$$

$$f''(x) = -2\sin(2x)$$

da får vi

$$f''\left(\frac{\pi}{4}\right) = -2\sin\left(2 \cdot \frac{\pi}{4}\right) = -2\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = -2 \cdot 1 = -2$$

d.3)

På bakgrunn av det vi fant i d.1) kan jeg si at vi er i et ekstremalpunkt på $f(x)$. Når det gjelder opplysningene fra d.2) kan jeg si at grafen er på vei nedover, altså er vi i et toppunkt.

e.1)

Månedlige nedbetalinger er uttrykt ved denne geometriske rekka

$$501 + \frac{501}{x} + \frac{501}{x^2} + \ldots + \frac{501}{x^{11}}$$

Dersom de to tilbudene skal ha samme nåverdi, så er likningen vi må løse

$$\frac{501 \cdot \left(\frac{1}{x^{12}} - 1\right)}{\frac{1}{x} - 1} = 4999$$

Grafisk løsning på kalkulatoren: Sett høyreside som en funksjon og venstre side som en annen, og finn skjæringspunktet mellom de to funksjonene. Da finner vi

$$x \approx 1,03548$$

e.2)

Fra e.1 vet vi at renten, x, er tilnærmet lik $1,03548$. Det gir oss

$$1,03548^{12} \approx 1,511$$

hvilket tilsvarer ei rente på $51,1\%$ p.a

oppgave 2

a)

- Ett år har 365 dager $\Rightarrow x \in [0, 365\rangle$ og perioden

$$P = 365 \Rightarrow \quad c = \frac{2\pi}{365} \approx 0.0172$$

- Dagslengde
  - Kortest dag: $x = 355$, $f(x) = 6$
  - Lengste dag: $x = 172$, $f(x) = 18$
    Fra disse opplysningene, kan vi bestemme likevektslinje og amplitude

$$d = \frac{18 + 6}{2} = 12$$

$$A = \frac{18 - 6}{2} = 6$$

og til slutt faseforskyvningen.

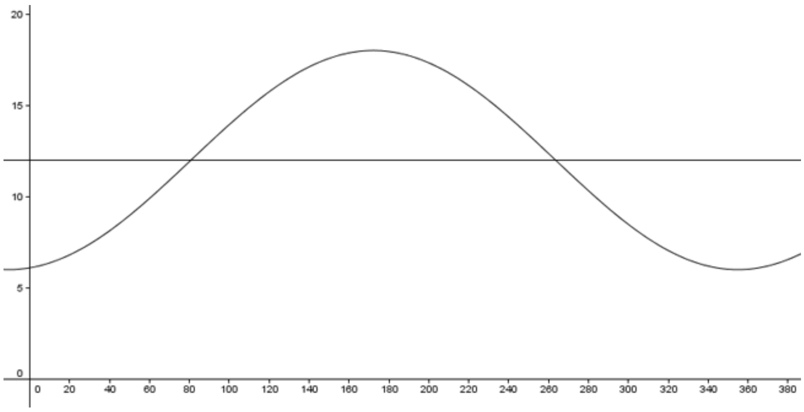
$$0.0172 \cdot (172) + \phi = \frac{\pi}{2}$$

$$\phi = \frac{\pi}{2} - 0.0172 \cdot 172 \approx -1.39$$

$$f(x) = A \sin(cx + \phi) + d$$

$$f(x) = 6 \sin(0.0172x - 1.39) + 12$$

b)



c)

$$f(x) = 6 \cdot \sin(0.0172x - 1.39) + 12$$

bestemmer førsteordens derivert

$$f'(x) = 6 \cdot \big(\sin(0.0172x - 1.39)\big)' \cdot (0.0172x - 1.39)' + (12)'$$

$$f'(x) = 0.1032 \cdot \cos(0.0172x - 1.39)$$

finner så den andrederiverte

$$f''(x) = 0.1032 \cdot \big(\cos(0.0172x - 1.39)\big)' \cdot (0.0172x - 1.39)'$$

$$f''(x) = -1.77504 \cdot 10^{-3} \cdot \sin(0.0172x - 1.39)$$

Dette gir oss likninga

$$f''(x) = 0$$

$$0.0172x - 1.39 = 0 + 2k\pi \quad \vee \quad 0.0172x - 1.39 = \pi + 2k\pi \qquad k \in \mathbb{Z}$$

$$0.0172x = 1.39 + 2k\pi \quad \vee \quad 0.0172x = \pi + 1.39 + 2k\pi$$

$$x = \frac{1.39 + 2k\pi}{0.0172} \quad \vee \quad x = \frac{\pi + 1.39 + 2k\pi}{0.0172}$$

$$x_1 \approx 80.8 + 365k \quad \vee \quad x_2 \approx 263.5 + 365k$$

Det er to vendepunkter på $f(x)$ i det gitte intervallet, $L = \{80.8, 263.5\}$. Da er dagslengden

$$f(80.81) = 6 \cdot \sin(0.0172 \cdot 80.81 - 1.39) + 12 = 6 \cdot 0 + 12 = 12$$

Viser ikke utregning på denne, men

$$f(263.46) = 12$$

12 timer, som vi ser, altså likevektslinja $y = 12$ til $f(x)$.

d)

Gjennomsnittsverdien for funksjonsuttrykket vil selvfølgelig være lik **likevektslinjen** til funksjonen, dermed kan jeg før jeg i det heletatt går løs på det integralet, konkludere med at svaret vil være 12 timer.

$$\frac{1}{365 - 0} \int_0^{365} \left(6 \sin(0.0172x - 1.39) + 12\right)\, dx$$

som jeg skriver om til uttrykket under og, i latskapens navn, løser på lommeregneren.

$$\frac{6}{365} \int_0^{365} \left(\sin(0.0172x - 1.39) + 2\right)\, dx = 12$$

Konkluderer altså med at det jeg sa innledningsvis stemmer.

oppgave 3

Obs: Notasjonen jeg bruker i denne oppgaven er ikke lik den de nytter i læreboken jeg har brukt (Aschoug). Hvis du har problemer med å for stå notasjonen jeg bruker, bør du lese denne artikkelen om normalfordeling.

a)

$$\hat{p} = \frac{73}{120} = 0.608\overline{3} \approx 60.8\%$$
$$S_{\hat{p}} = \sqrt{\frac{0.6083 \cdot (1 - 0.6083)}{120}} = 0.04456 \approx 4.5\%$$

b)

Et 95% konfidensintervall, er gitt ved

$$\langle \hat{p} \pm Y \cdot S_{\hat{p}} \rangle$$

Vi finner Y, implikasjonspilen betyr at jeg leser av tabellen.

$$\Phi(Y) = \Phi\left(\frac{0.95 + 1}{2}\right) = \Phi(0.975) \qquad \Longrightarrow \qquad 1.96$$
$$\langle 0.6083 \mp 1.96 \cdot 0.04456 \rangle$$
$$\langle 0.5209,\ 0.6956 \rangle$$

Et 95% konfidensintervall, er derfor gitt ved $\langle 52.1\%, 69.6\% \rangle$

c)

Jfr beregningene i a og b, ser vi at usikkerheten er svært stor. Konfidensintervallet har nemlig en differanse på omlag 17,47%. Middelverdien for konfidensintervallet $\hat{p} \approx 60.8\%$, så en mer korrekt påstand fra rektor ville vært:

> Vi har grunn til å tro at circa 52-70% av våre elever trives svært godt

d)

$$\hat{p} = \frac{0.315 + 0.369}{2} = 0.342 = 34.2\%$$
$$0.342 + 1.96 \cdot S_{\hat{p}} = 0.369$$
$$1.96 S_{\hat{p}} = 0.027$$
$$S_{\hat{p}} = \frac{0.027}{1.965}$$
$$S_{\hat{p}} \approx 0.01374 \approx 1.4\%$$

e)

$$0.01374 = \sqrt{\frac{0.342 \cdot (1 - 0.342)}{n}}$$
$$0.01374^2 = \frac{0.225036}{n}$$
$$0.01374^2 n = 0.225036$$
$$n = \frac{0.225036}{0.01374^2}$$
$$n \approx 1192$$

I denne undersøkelsen, ble ca 1192 elever spurt.

oppgave 4 - alternativ I

a)

En sirkel har sentrum i $S(2,3)$ og har radius $r = 4$ likningen blir

$$(x-2)^2 + (y-3)^2 = 4^2$$

b)

$$\ell : \begin{cases} x = 6 - t \\ y = 3 + t \end{cases}$$

Setter inn for x og y fra ℓ i likningen for a og løser med hensyn på t

$$((6-t)-2)^2 + ((3+t)-3)^2 = 4^2$$
$$(4-t)^2 + (t)^2 = 4^2$$
$$2t^2 - 8t + 16 - 16 = 0$$
$$2t^2 - 8t = 0$$
$$2t(t-4)$$
$$t_1 = 0 \quad \vee \quad t_2 = 4$$

Så bruker vi verdiene vi t_1 og t_2 og setter inn i ℓ for å finne koordinatene til skjæringspunktene.

$$x = 6 - 0 = 6$$
$$y = 3 + 0 = 3$$

og

$$x = 6 - 4 = 2$$
$$y = 3 + 4 = 7$$

Skjæringspunktene er $P_1(6,3)$ og $P_2(2,7)$

c)

Vi blir tildelt

$$x^2 + y^2 - 10x - 12y + 36 = 0$$

og skal finne koordinatene til sentrum S_2 og radius r_2 til sirkelen. Bruker fullstendige kvadrater for å bestemme koordinatene

$$(x-5)^2 = x^2 - 10x + 25$$
$$(y-6)^2 = y^2 - 12y + 36$$

Legger da til de røde tallene på hver side av likningen og får

$$(x-5)^2 + (y-6)^2 + 36 = 25 + 36$$
$$(x-5)^2 + (y-6)^2 = 5^2$$

Altså er $S_2(5,6)$ og $r_2 = 5$

d)

Kaller denne parameterfremstillingen for ξ og noterer at den skal gå gjennom $Q(9,3)$. Vi kaller retningsvektoren for linja ξ for $\vec{a}$ I tillegg til alt dette, vet vi også at

$$\overrightarrow{S_2Q} \perp \vec{a}$$

og siden det kun er retningen og ikke lengden som er viktig, kan vi bestemme at $\vec{a} = [1, b]$. Da har vi likninga

$$[9-5, 3-6] \cdot [1, b] = 0$$

denne likningen løser vi med hensyn på b

$$[4, -3] \cdot [1, b] = 0$$

$$4 - 3b = 0$$

$$b = \frac{4}{3}$$

Vilket vi vet stemmer, fordi

$$[a, b] \perp [-b, a]$$

da kan vi også skrive

$$\vec{a} = [3, 4]$$

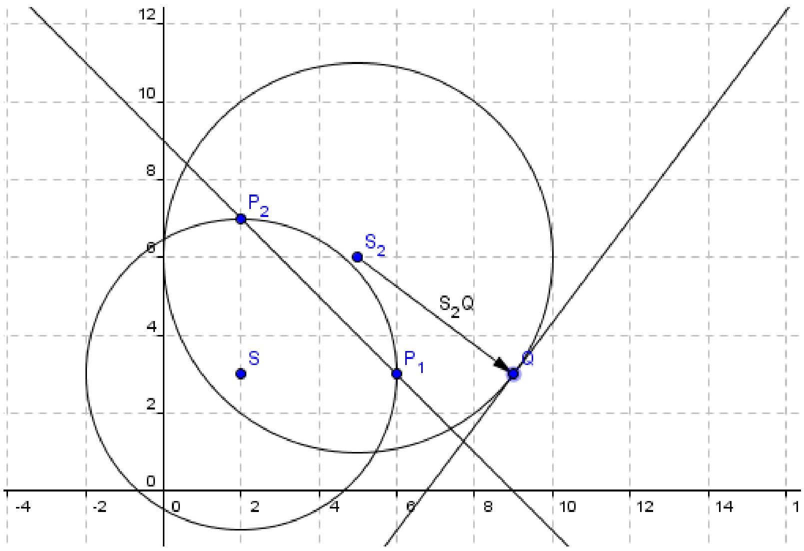
Vi får da

$$[x, y] = [9, 3] + [3, 4]s$$

$$\Updownarrow$$

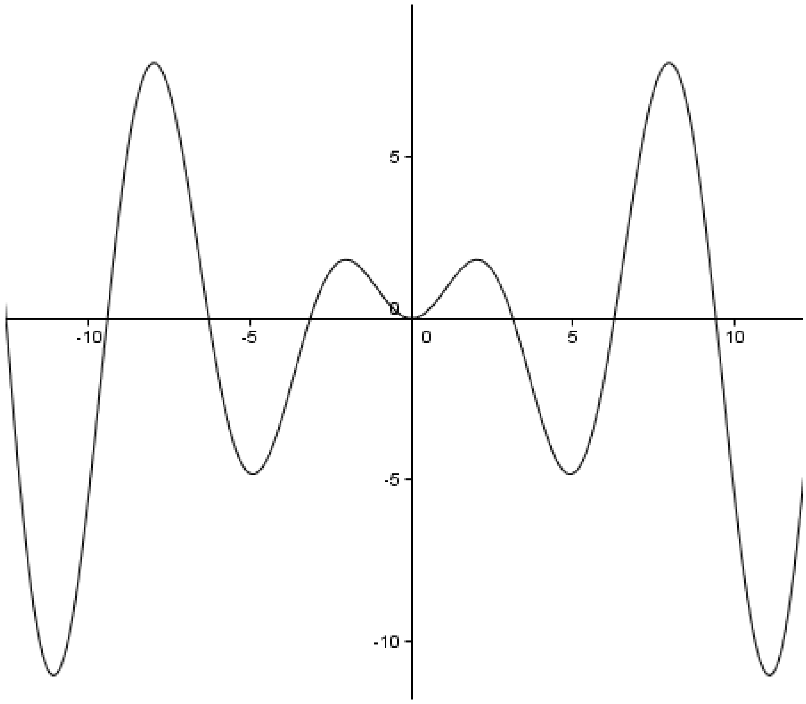
$$\xi : \begin{cases} x = 9 + 3s \\ y = 3 + 4s \end{cases}$$

Her er forøvrig det meste av oppgaven illustrert grafisk



oppgave 4 - alternativ II

a)



b)

$f(x)$ har nullpunktene når

$$f(x) = 0$$

$$x \cdot \sin x = 0$$

$$\sin x = 0$$

$$x = 0 + 2k\pi \quad \vee \quad x = \pi + 2k\pi \qquad k \in \mathbb{Z}$$

Vi husker at intervallet er $x \in \langle -10, 10 \rangle$. Dette gir oss løsninger for

$$k = \{-2, -1, 0, 1\} \quad \Longrightarrow \quad x = \{-3\pi, -2\pi, -\pi, 0, \pi, 2\pi, 3\pi\}$$

c)

Skal nå løse det uegentlige integralet

$$\int x \cdot \sin x \, dx$$

Her anvender jeg delvis integrasjon og setter følgende

$$u' = \sin x \quad \Longrightarrow \quad u = -\cos x$$

$$v' = 1 \quad \Longrightarrow \quad v = x$$

videre

$$\int x \cdot \sin x \, dx = -x \cos x - \int -\cos x \, dx$$

$$\int x \cdot \sin x \, dx = -x \cos x + \int \cos x \, dx$$

$$\int x \cdot \sin x \, dx = \sin x - x \cos x + C$$

d)

$$\int_{-10}^{10} (x \cdot \sin x) \; dx = 2 \cdot \int_{0}^{10} (x \cdot \sin x) \; dx = 2 \cdot [\sin x - x \cos x]_0^{10} =$$

$$F(10) - F(0) = 2\sin(10) - 20\cos(10) - 0 \approx 15.7$$

Det betyr at netto areal over x-aksen er tilnærmet 15.7

oppgave 5

a)

Krysser førsteaksen når y-komponenten er null.

$$y(t) = 0$$

$$2\sin t = 0$$

Husk at omløpet er $t \in [0, 2\pi]$

$$t = \arcsin 0$$

$$t = 0 \quad \vee \quad t = \pi$$

da er

$$x(0) = 5\cos(0) = 5$$

og

$$x(\pi) = 5\cos(\pi) = 5 \cdot (-1) = -5$$

Dermed har vi funnet $P_{x_1}(5, 0)$ og $P_{x_2}(-5, 0)$. Da var det klart for å finne når den krysser andreaksen, da er x-komponenten null.

$$5\cos t = 0$$

$$t = \arccos 0$$

$$t = \frac{\pi}{2} \quad \vee \quad t = \pi + \frac{\pi}{2} = \frac{3\pi}{2}$$

og deretter lokaliserer vi y-koordinatene

$$y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2 \cdot 1 = 2$$

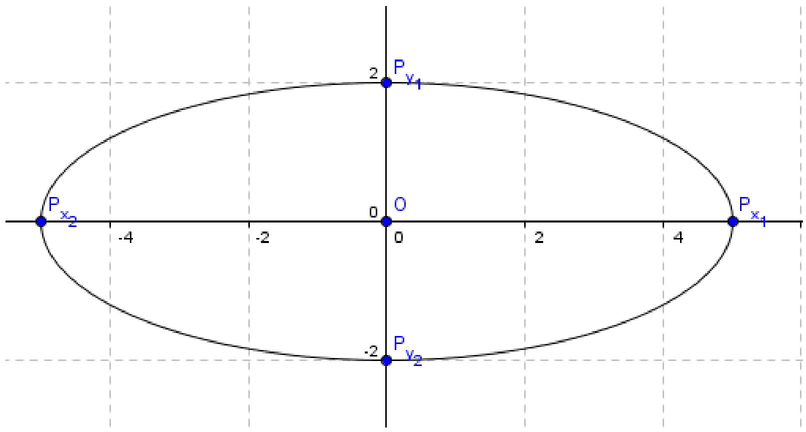
dernest

$$y\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 2\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right) = 2 \cdot (-1) = -2$$

så da har vi funnet alle punktene til denne kurven. De sistnevnte er $P_{y_1}(0, 2)$ og $P_{y_2}(0, -2)$

b)

Her ville det vært naturlig å bruke punktene fra a) og å dra ei linje gjennom dem. Da ville du fått



en ellipse!

c)

Fartsvektoren

$$\vec{v}(t) = \vec{r}'(t) = \left[5 \cdot (\cos t)',\, 2 \cdot (\sin t)'\right]$$

$$\vec{v}(t) = [-5 \sin t,\, 2 \cos t]$$

og akselerasjonsvektoren

$$\vec{a}(t) = \vec{v}'(t) = \vec{r}''(t) = \left[-5 \cdot (\sin t)',\, 2 \cdot (\cos t)\right]$$

$$\vec{a}(t) = [-5 \cos t,\, -2 \sin t]$$

d)

Skal sammenlikne retningene for posisjons-, farts- og akselerasjonsvektoren for $t = \left\{\frac{\pi}{2},\, \pi\right\}$

$$\vec{r}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left[5 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}\right),\, 2 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right] = [0, 2]$$

$$\vec{r}\,(\pi) = [5 \cdot \cos(\pi)\,,\, 2 \cdot \sin(\pi)] = [5, 0]$$

Fartsvektoren

$$\vec{v}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left[-5 \cdot \sin\left(\frac{\pi}{2}\right),\, 2 \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\right] = [-5, 0]$$

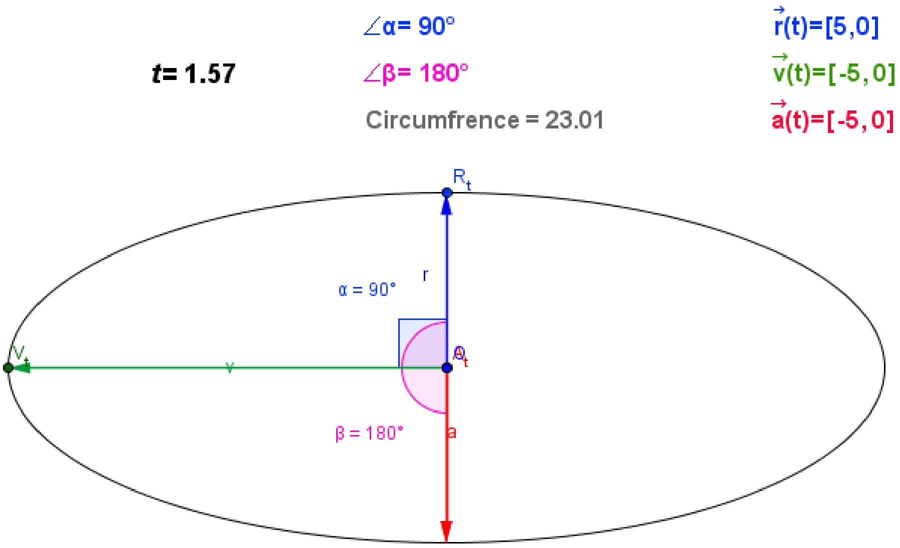
$$\vec{v}\,(\pi) = [-5 \cdot \sin(\pi)\,,\, 2 \cdot \cos(\pi)] = [0, 2]$$

Akselerasjonsvektoren

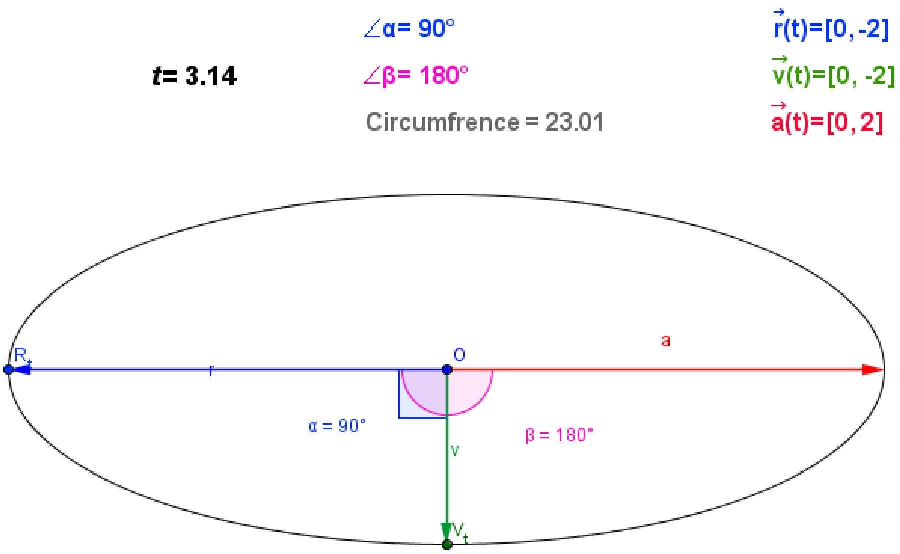
$$\vec{a}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left[-5 \cos\left(\frac{\pi}{2}\right),\, -2 \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\right] = [0, -2]$$

$$\vec{a}(\pi) = [-5 \cos(\pi),\, -2 \sin(\pi)] = [-5, 0]$$

Det blir en relativt stor oppgave å vise alle disse utregningene, men her er en fremstilling av vektorene når $t = \frac{\pi}{2}$,


t= 1.57
∠α= 90°
∠β= 180°
Circumfrence = 23.01
r(t)=[5,0]
v(t)=[-5, 0]
a(t)=[-5, 0]
α = 90°
β = 180°

Og så for $t = \pi$


t= 3.14
∠α= 90°
∠β= 180°
Circumfrence = 23.01
r(t)=[0, -2]
v(t)=[0, -2]
a(t)=[0, 2]
α = 90°
β = 180°

e)

$$s = \int_0^{2\pi} \left(\sqrt{(-5\sin t)^2 + (2\cos t)^2}\right)\, dt$$

$$s = \int_0^{2\pi} \left(\sqrt{25\sin^2 t + 4\cos^2 t}\right)\, dt$$

Gjør integralet litt finere, hehe

$$s = \int_0^{2\pi} \left(\sqrt{25\sin^2 t + 4\cdot\left(1-\sin^2 t\right)}\right)\, dt = \int_0^{2\pi} \left(\sqrt{21\sin^2 t + 4}\right)\, dt$$

Bruker lommeregner for å finne buelengden s da integrasjon av denne integranden ikke lar seg gjøre med kompetansen fra 3MX pensum.

$$s \approx 23.01$$

f)

Skriver først $\vec{r}(t)$ som en parameterfremstilling for å gjøre det tydeligere

$$x = 5\cos t \quad \wedge \quad y = 2\sin t$$

Setter så dette inn i

$$\frac{x^2}{5^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1$$

Hvor vi da får

$$\frac{(5\cos t)^2}{5^2} + \frac{(2\sin t)^2}{2^2} = 1$$

$$\frac{\cancel{5^2}\cdot\cos^2 t}{\cancel{5^2}} + \frac{\cancel{2^2}\cdot\sin^2 t}{\cancel{2^2}} = 1$$

$$\sin^2 t + \cos^2 t = 1$$

og det er jo en kjennsgjerning at dette stemmer, her har vi jo den trigonometriske identiteten.

Dersom du er interessert, finner du flere løsningsforslag på eksamensoppgaver.org

SLUTT