

Eksamen

Fag: AA6524 Matematikk 3MX

Eksamensdato: 4. juni 2007

Vidaregåande kurs II / Videregående kurs II

Studieretning: Allmenne, økonomiske og administrative fag

Elevar/Elever

Oppgåva ligg føre på begge målformer, først nynorsk, deretter bokmål. /
Oppgaven foreligger på begge målformer, først nynorsk, deretter bokmål.

OPPGAVE 1

a) Deriver funksjonen

$$f(x) = \tan(x^2)$$

b) Bestem integralet

$$\int 4x \cdot \ln x \, dx$$

c) Bestem integralet

$$\int \frac{x}{1+x^2} \, dx$$

d) Gitt funksjonen

$$f(x) = \frac{1}{5}x - \cos x \quad x \in \langle 0, 2\pi \rangle$$

1) Finn $f'(x)$

2) Finn koordinatene til eventuelle topp- og bunnpunkter på grafen til f ved regning.

e) En kuleflate er gitt ved ligningen

$$x^2 - 6x + y^2 + 2y + z^2 - 4z = 11$$

1) Finn sentrum S og radius r i kula.

2) Vis at punktet $A(3, 2, 6)$ ligger på kuleflaten. Finn ligningen for et plan som går gjennom A og som står normalt på \overline{AS} .

f) En stokastisk variabel X har følgende sannsynlighetsfordeling:

x	0	1	2	3
$P(X = x)$	0,2	0,3	0,4	0,1

1) Bestem forventningsverdien og standardavviket til X .

2) En annen stokastisk variabel Y er gitt ved $Y = 3X + 5$. Bestem forventningsverdien og standardavviket til Y .

OPPGAVE 2

En gruppe elever ønsker å bestemme andelen av røde biler i Norge. De stiller seg ved en hovedvei for å registrere andelen røde biler av dem som passerer.

Vi definerer den stokastiske variabelen:

X = antall røde biler som passerer.

- a) Forklar hvorfor det er rimelig å hevde at X er binomisk fordelt.

Elevene registrerer 93 røde av totalt 420 biler som passerer.

- b) La p være andelen røde biler i Norge. Bruk elevenes registreringer og finn et estimat for p . Bestem standardfeilen til estimatet.
- c) Finn et 95 % konfidensintervall for andelen røde biler basert på elevenes tellinger.

OPPGAVE 3

Kari sparer på en BSU-konto. Hun setter inn 15 000 kroner i begynnelsen av året i 10 år. Vi antar at innskuddsrenten er 2,5 % per år i hele spareperioden.

- a) Hvor mye har hun på kontoen ett år etter at det siste beløpet er satt inn?

Kari kjøper et hus. Hun låner 1 000 000 kroner. Vi antar at lånerenten er 4,0 % per år i hele låneperioden. Banken foreslår at lånet skal betales tilbake i 20 like store årlige beløp, første gang ett år etter låneopptaket.

- b) Finn ved regning hvor store de årlige innbetalingene vil bli etter denne planen.

Kari ønsker ikke å betale mer enn 60 000 kroner i året.

- c) Finn ved regning hvor lang nedbetalingstiden da vil bli.

OPPGAVE 4

***Du skal besvare enten alternativ I eller alternativ II.
De to alternativene er likeverdige ved vurderingen.***

*(Dersom besvarelsen inneholder deler av begge,
vil bare det du har skrevet på alternativ I, bli vurdert.)*

Alternativ I

Kurven på skissen nedenfor blir kalt en *lemniskate*.



Bernoulli sin formel for den høyre delen av lemniskaten er

$$r(\theta) = \sqrt{2 \cos(2\theta)} \quad \theta \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4} \right]$$

- Finne ved regning koordinatene til skjæringspunktene mellom grafen til r og førsteaksen.
- Tegn grafen til r .
- Finne ved regning arealet av det området som er avgrenset av grafen til r .

Den unge Niels Henrik Abel arbeidet også med lemniskaten. Han brukte følgende ligning for lemniskaten:

$$(x^2 + y^2)^2 = 2x^2 - 2y^2$$

- Sett $x = r \cos \theta$ og $y = r \sin \theta$ inn i ligningen til Abel, og vis at du får Bernoulli sin formel for lemniskaten.

Alternativ II

Funksjonen f er gitt ved

$$f(x) = -3 \sin\left(\frac{\pi}{12}x\right) - 3 \cos\left(\frac{\pi}{12}x\right) \quad x \in [0, 24)$$

- a) Tegn grafen til f .
- b) Vis at $f(x)$ kan omskrives til

$$f(x) = 3\sqrt{2} \sin\left(\frac{\pi}{12}x + \frac{5\pi}{4}\right)$$

- c) Finn koordinatene til eventuelle topp- og bunnpunkter ved regning.

Et døgn var temperaturen $T(x)$ målt i grader celsius x timer etter midnatt gitt ved

$$T(x) = 15 + f(x)$$

Gjennomsnittstemperaturen dette døgnet er gitt ved $\frac{1}{24} \int_0^{24} T(x) dx$

- d) Bestem gjennomsnittstemperaturen ved å løse integralet ved regning.
Forklar hvordan du kunne ha funnet gjennomsnittstemperaturen på en annen måte.

OPPGAVE 5

I denne oppgaven skal vi studere funksjoner gitt på formen

$$f(x) = \cos mx \cdot \cos nx$$

Først ser vi på funksjonen gitt ved $f(x) = \cos x \cdot \cos 5x$

- Skisser grafen til f i et koordinatsystem. Velg x -verdier fra 0 til 7 .
- Tegn grafene til $\cos x$ og $-\cos x$ i det samme koordinatsystemet. Kommenter det du ser.
- Bruk formlene

$$\cos(u - v) = \cos u \cos v + \sin u \sin v$$

$$\cos(u + v) = \cos u \cos v - \sin u \sin v$$

til å vise at

$$\cos u \cos v = \frac{1}{2}(\cos(u - v) + \cos(u + v))$$

- Bruk resultatet i c) til å regne ut integralet

$$\int \cos x \cdot \cos 5x \, dx$$

- Vis ved regning at

$$\int_0^{2\pi} \cos mx \cdot \cos nx \, dx = 0$$

for alle naturlige tall m og n , der $m \neq n$.

- Bestem ved regning integralet i e) når $m = n$.