Løsningsforslag
Eksamen 3MX - AA6524 - 04.06.2007

eksamensoppgaver.org

Om løsningsforslaget

Løsningsforslaget for matematikk eksamen i 3MX er gratis, og det er lastet ned på eksamensoppgaver.org. Løsningen er myntet på elever og privatister som vil forbrede seg til eksamen i matematikk. Lærere må gjerne bruke løsningsforslaget i undervisningsøyemed, men virksomheter har ingen rett til å anvende dokumentet.

Løsningsforslagene skal utelukkende distribueres fra nettstedet eksamensoppgaver.org, da det er viktig å kunne føye til og rette eventuelle feil i ettertid. På den måten vil alle som ønsker det, til enhver tid finne det siste oppdaterte verket. eksamensoppgaver.org ønsker videre at flest mulig skal få vite om eksamensløsningene, slik at det finnes et eget nettsted hvor man kan tilegne seg dette gratis.

Dersom du sitter på ressurser du har mulighet til å dele med deg, eller ønsker å bidra på annen måte, håper eksamensoppgaver.org på å høre fra deg.

Innholdsfortegnelse

oppgave 1

a)

$$\begin{aligned} f(x) &= \tan(x^2) \\ f'(x) &= \left(\tan(x^2)\right)' \cdot (x^2)' \\ f'(x) &= 2x\left(\tan^2(x^2)+1\right) \end{aligned}$$

b)

Vi har integralet

$$\int 4x \ln x dx$$

Bruker delvis integrasjon, der regelen er

$$\int u\prime \cdot v \, dx = u \cdot v - \int u \cdot v\prime \, dx$$

følgelig setter vi

$$\begin{aligned} u' &= 4x \qquad & u &= 2x^2 \\ v' &= \frac{1}{x} \qquad & v &= \ln x \end{aligned}$$

og regner ut integralet

$$\begin{aligned} \int 4x \ln x dx &= 2x^2 \ln x - \int 2x^2 \cdot \frac{1}{x} dx \\ &= 2x^2 \ln x - \int 2x^{\cancel{2}} \cdot \frac{1}{\cancel{x}} dx \\ &= 2x^2 \ln x - 2 \cdot \int x dx \\ &= 2x^2 \ln x - x^2 \\ &= x^2\left(\ln x^2 - 1\right) + C \end{aligned}$$

Merk at jeg flytter totallet og gjør det til en eksponent av x i den naturlige logaritmen.

c)

$$\int \frac{x}{1+x^2}dx$$

Anvender substitusjon, og setter

$$u = 1 + x^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{du}{dx} = 2x$$

$$\frac{1}{2}\int \frac{1}{1+x^2} \cdot 2x dx$$

$$\frac{1}{2}\int \frac{1}{u} du = \frac{1}{2}\ln|u|$$

Setter tilbake substitusjonen.

$$\int \frac{x}{1+x^2}dx = \ln|\sqrt{1+x^2}| + C$$

d.1)

$$f(x) = \frac{1}{5}x - \cos x \qquad x \in \langle 0, 2\pi \rangle$$

$$f'(x) = \frac{1}{5}(x)' - (\cos x)'$$

$$f'(x) = \frac{1}{5} + \sin x$$

d.2)

$$\sin x = -\frac{1}{5}$$

$$x = \arcsin\left(-\frac{1}{5}\right)$$

Det finnes ingen flere løsninger innenfor intervallet $x \in \langle 0, 2\pi \rangle$

$$x_1 \approx 2\pi - |-0.201| \approx 6.08 \qquad \vee \qquad x_2 \approx \pi + |-0.201| \approx 3.34$$

Finner y-koordinatene

$$f(6.08) = \frac{1}{5} \cdot (6.08) - \cos(6.08) \approx 0.24$$

$$f(3.34) = \frac{1}{5} \cdot (3.34) - \cos(3.34) \approx 1.65$$

Vi har funnet ekstremalpunktene $P_t \approx (3.34, 1.65)$ og $P_b \approx (6.08, 0.24)$

e.1)

Vi vil bestemme sentrum, S, og radius, r, av kula.

$$x^2 - 6x + y^2 + 2y + z^2 - 4z = 11$$

Lager fullstendige kvadrater.

$$(x-3)^2 = x^2 - 6x + 9$$
$$(y+1)^2 = y^2 + 2y + 1$$
$$(z-2)^2 = z^2 - 4z + 4$$

Legger til for de fullstendige kvadratene på høyresiden.

$$(x-3)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = 11 + 9 + 1 + 4$$
$$(x-3)^2 + (y+1)^2 + (z-2)^2 = 5^2$$

Vi kan konkludere at $S(3, -1, 2)$ og $r = 5$

e.2)

Punktet $A(3, 2, 6)$ ligger på kuleflaten fordi

$$(3-3)^2 + (2+1)^2 + (6-2)^2 = 0^2 + 3^2 + 4^2 = 25 = 5^2$$

Altså er likningen for kula sann, og vil nå finne likningen for et plan som går gjennom A og som står normalt på $\overrightarrow{AS}$

$$\overrightarrow{AS} = [3-3, -1-2, 2-6] = [0, -3, -4]$$

Vi har altså funnet normalvektoren $\vec{n} = \overrightarrow{AS}$ til planet. Planet går også igjennom punktet, A, og vi får;

$$0(x-3) + (-3)(y-2) + (-4)(z-6) = 0$$
$$0x - 3(y-2) - 4(z-6) = 0$$
$$-3y + 6 - 4z + 24 = 0$$
$$-3y - 4z + 30 = 0$$

f.1)

$$\mu = E(X) = (0 \cdot 0.2) + (1 \cdot 0.3) + (2 \cdot 0.4) + (3 \cdot 0.1) = 1.4$$

$$\sigma = SD(X) = \sqrt{Var(X)} = \sqrt{\sum_{i=1}^{3} (x_i - \mu)^2 \cdot P(X = x_i)} =$$

$$\sqrt{0.84} = \sqrt{\frac{21}{25}} = \frac{\sqrt{21}}{5}$$

f.2)

$$\mu_2 = E(Y) = 3 \cdot E(X) + 5 = 3 \cdot 1.4 + 5 = 9.2$$

$$\sigma_2 = SD(Y) = \sqrt{Var(Y)} = \sqrt{Var(3X+5)} = \sqrt{3^2 \cdot Var(X)} = \sqrt{\frac{189}{25}} = \frac{3\sqrt{21}}{5}$$

oppgave 2

a)

1. Det er naturlig at X er binomisk fordelt, for enten så er den passerende bilen rød, eller så er den det ikke.
2. Dersom en bil er rød, er populasjonen av røde biler som passerer ikke betydelig svekket, og dermed vil vi kunne definere dette som et uavhengig forsøk.

b)

X = antall røde biler som passerer.
Da elevene registrerer hele 93 røde av 420 biler som passerer, vil estimatet være

$$\hat{p} = \frac{X}{n}$$

$$\Rightarrow \; \hat{p} = \frac{93}{420} = \frac{31}{140} \approx 0.22 = 22\%$$

og standardfeilen blir

$$S_{\hat{p}} = \sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}$$

$$\Rightarrow S_{\hat{p}} = \sqrt{\frac{\frac{31}{140} \cdot \frac{109}{140}}{420}} = \frac{\sqrt{3379}}{40\sqrt{5145}} \approx 0.020 = 2\%$$

c)

Et 95% konfidensintervall for andelen av røde biler blir

$$\langle \hat{p} \mp z S_{\hat{p}} \rangle$$

Finner at

$$\Phi(z) = \Phi\left(\frac{0.95+1}{2}\right) = \Phi(0.975) \Longrightarrow^{\text{tabell}} 1.96$$

Hvilket gir oss:

$$\langle 0.182, \, 0.261 \rangle$$

eller i prosent

$$\langle 18.2\%, \, 26.1\% \rangle$$

oppgave 3

a)

Vi ser at

$$a_1 = 15000 \cdot 1.025, \qquad a_2 = 15000 \cdot 1.025^2 \quad \Rightarrow \quad k = \frac{6000 \cdot 1.025^2}{6000 \cdot 1.025} = 1.025$$

$$a_3 = 15000 \cdot 1.025^3, \qquad a_4 = 15000 \cdot 1.025^4 \Rightarrow \quad k = \frac{6000 \cdot 1.025^4}{6000 \cdot 1.025^3} = 1.025$$

Vi har funnet ei geometrisk rekke med kvotienten, $k = 1.025$. Vi definerer derfor rekkas sum slik;

$$S_n = \frac{15000 \cdot 1.025\,(1.025^n - 1)}{1.025 - 1} \qquad n \in [1, 10]$$

$$S_{10} \approx 172\,251 \text{ kr}$$

b)

- Lån: 1 000 000 kr.
- Kalkulasjonsrente: 4% per år.
- Tibakebetaling: 20 like store årlige beløp.
- Første beløp ett år etter låneopptaket.
- x kr per år.

$$\frac{x \cdot (1.04^{20} - 1)}{1.04 - 1} = 1000000 \cdot 1.04^{20}$$

$$x = \frac{1000000 \cdot 1.04^{20} \cdot 0.04}{(1.04^{20} - 1)}$$

$$x \approx 73\,581.75$$

c)

Vi vil vite hvor mange års nedbetalingstiden n blir, når årlige innbetalinger x er maks 60 000 kroner.

$$\frac{60000 \cdot (1.04^n - 1)}{1.04 - 1} = 1000000 \cdot 1.04^n$$

$$60000 \cdot (1.04^n - 1) = 1000000 \cdot 1.04^n \cdot 0.04$$

$$1.04^n - 1 = \frac{40000 \cdot 1.04^n}{60000}$$

$$\frac{1.04^n - 1}{1.04^n} = \frac{4}{6}$$

$$\frac{1.04^n}{1.04^n} - \frac{1}{1.04^n} = \frac{4}{6}$$

$$1 - \frac{1}{1.04^n} = \frac{4}{6}$$

$$-1.04^{-n} = -\frac{1}{3}$$

$$1.04^{-n} = \frac{1}{3}$$

$$-n\ln(1.04) = \ln\left(\frac{1}{3}\right)$$

$$-n = \frac{\ln 1 - \ln 3}{\ln(1.04)}$$

$\ln 1 = 0$ slik at

$$-n = \frac{-\ln 3}{\ln(1.04)}$$

$$n = \frac{\ln 3}{\ln(1.04)}$$

$$n \approx 28$$

Nedbetalingstiden er altså circa 28 år, dersom Kari kun vil betale 60 000 kroner per år.

oppgave 4 - alternativ I

a)

$$r(\theta) = \sqrt{2\cos(2\theta)} \qquad \theta \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$$

Vi vil finne når $r(\theta)$ skjærer førsteaksen.

$$r(0) = \sqrt{2\cos(0)} = \sqrt{2}$$

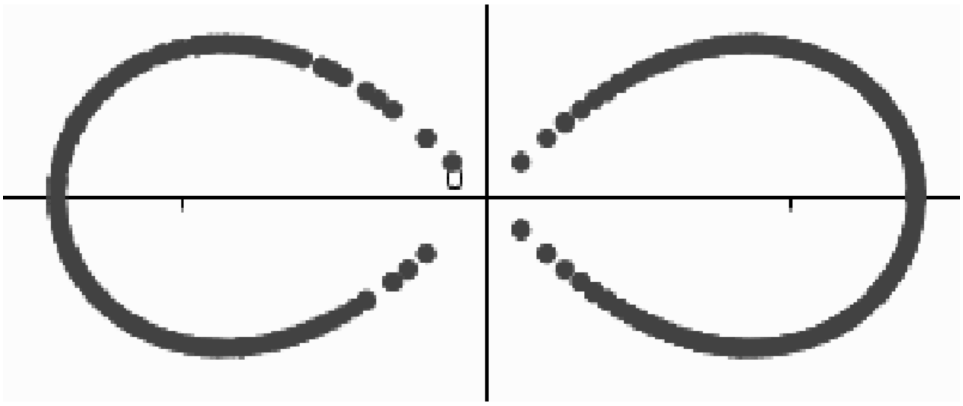
$$r\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2\cos\left(2\cdot\frac{\pi}{4}\right)} = \sqrt{2\cos(\pi)} = 0$$

Vi vet at

$$\cos\pi = \cos(-\pi) = -\cos(\pi) = 0$$

Punktene der $r(\theta)$ skjærer førsteaksen er $P(\sqrt{2}, 0)$, $Q\left(0, \frac{\pi}{4}\right)$ og $R\left(0, -\frac{\pi}{4}\right) =$

b)



c)

$$\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}} \left[(r(\theta))^2\right] d\theta =$$

$$2\cdot\frac{1}{2}\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \left[\left(\sqrt{2\cos(2\theta)}\right)^2\right] d\theta =$$

$$2\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} (\cos(2\theta))\, d\theta = 2\left[\frac{1}{2}\sin(2\theta)\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \sin(2\theta)\Big|_0^{\frac{\pi}{4}} =$$

$$\sin\left(2\cdot\frac{\pi}{4}\right) - \sin(2) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - 0 = 1$$

d)

Vi har Niels Henrik Abels likning for lemniskaten:

$$(x^2 + y^2)^2 = 2x^2 - 2y^2 \tag{1}$$

Med sammengengen

$$x = r\cos\theta \qquad \wedge \qquad y = r\sin\theta \tag{2}$$

Vil vi vise at

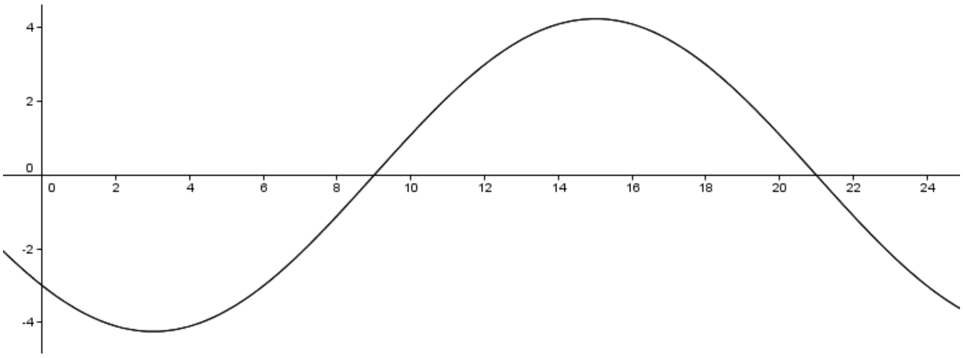
$$r(\theta) = \sqrt{2\cos(2\theta)}$$

Så setter inn for x og y fra (2) i (1)

$$\begin{aligned}
\left((r\cos\theta)^2 + (r\sin\theta)^2\right)^2 &= 2\cdot(r\cos\theta)^2 - 2\cdot(r\sin\theta)^2 \\
\left(r^2\cdot\left(\cos^2\theta + \sin^2\theta\right)\right)^2 &= 2r^2\left(\cos^2\theta - \sin^2\theta\right) \\
\left(r^2\right)^2 &= 2r^2\cdot(\cos(2\theta)) \\
\frac{r^4}{r^2} &= 2\cos(2\theta) \\
r^2 &= 2\cos(2\theta) \\
r = \sqrt{2\cos(2\theta)} & \qquad\qquad r \geq 0
\end{aligned}$$

oppgave 4 - alternativ II

a)



b)

$$f(x) = -3\sin\left(\frac{\pi}{12}x\right) - 3\cos\left(\frac{\pi}{12}x\right) \qquad\qquad x \in [0, 24\rangle$$

$$f(x) = \sqrt{(-3)^2 + (-3)^2} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{12}x + \arctan\left(\frac{-3}{-3}\right)\right)$$

Vi har ϕ i 3 kvadrant

$$\phi = \pi + \arctan(1) = \pi + \frac{\pi}{4} = \frac{5\pi}{4}$$

Dermed har vi funnet:

$$f(x) = 3\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{12}x + \frac{5\pi}{4}\right)$$

c)

Finner ekstremalpunktene.
Vi vet at $\sin\left(\frac{\pi}{12}x + \frac{5\pi}{4}\right) = \{1, -1\}$ for topp- og bunnpunktene.

$$f(x) = 3\sqrt{2}$$

$$f(x) = 3\sqrt{2} \cdot (-1) = -3\sqrt{2}$$

Videre

$$\sin\left(\frac{\pi}{12}x + \frac{5\pi}{4}\right) = 1$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{\frac{\pi}{2} - \frac{5}{4}\pi + 2k\pi}{\frac{\pi}{12}} = -9 + 24k + (24) = 15 + 24k$$

og

$$\sin\left(\frac{\pi}{12}x + \frac{5\pi}{4}\right) = -1$$

$$\Rightarrow \quad x = \frac{-\frac{\pi}{2} - \frac{5}{4}\pi + 2k\pi}{\frac{\pi}{12}} = -21 + 24k + (24) = 3 + 24k$$

der

$$k \in \mathbb{Z} \text{ og } x \in [0, 24\rangle \implies k = 0$$

dermed

$$P_{topp}(3\sqrt{2},\, 15)$$

$$P_{bunn}(-3\sqrt{2},\, 3)$$

d)

Temperaturen $T(x)$ målt i grader celsius x timer etter midnatt er gitt ved:

$$T(x) = 15 + f(x)$$

$$\implies T(x) = -3\sin\left(\frac{\pi}{12}x\right) - 3\cos\left(\frac{\pi}{12}x\right) + 15$$

Dette døgnet, var gjennomsnittstemperaturen gitt ved

$$\frac{1}{24} \cdot \int_0^{24} \left(-3\sin\left(\frac{\pi}{12}x\right) - 3\cos\left(\frac{\pi}{12}x\right) + 15\right) dx =$$

$$\frac{1}{24} \cdot \left[\frac{-3}{-\frac{\pi}{12}} \cdot \cos\left(\frac{\pi}{12}x\right) - \frac{3}{\frac{\pi}{12}} \cdot \sin\left(\frac{\pi}{12}x\right) + 15x\right]_0^{24} =$$

$$\left[\frac{36}{24\pi}\cos\left(\frac{\pi}{12}x\right) - \frac{36}{24\pi}\sin\left(\frac{\pi}{12}x\right) + \frac{15}{24}x\right]_0^{24} =$$

$$\left[\frac{3}{2\pi}\cos\left(\frac{\pi}{12}x\right) - \frac{3}{2\pi}\sin\left(\frac{\pi}{12}x\right) + \frac{5}{8}x\right]_0^{24} =$$

$$F(24) - F(0) =$$

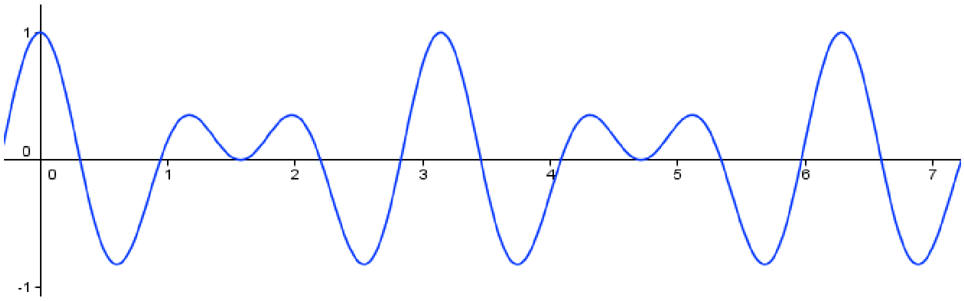
$$\left(\frac{3}{2\pi} - 0 + 15\right) - \left(\frac{3}{2\pi} - 0 + 0\right) = 15$$

En bedre, og mye mer effektiv metode, ville bare vært å utnytte at når $\sin\left(\frac{\pi}{12}x + \frac{5\pi}{4}\right) = 0$, så er likevektslinjen y=d gjennomsnittstemperaturen.

$$f(x) = y = d = 3\sqrt{2} \cdot 0 + 15 = 15$$

oppgave 5

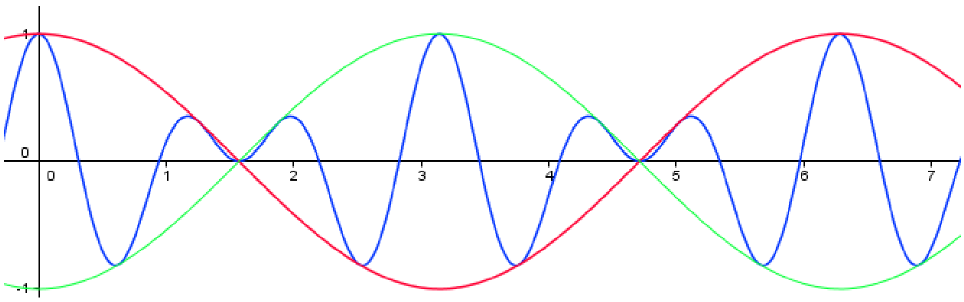
a)



På bildet ovenfor illustreres

$$f(x) = \cos x \cdot \cos(5x) \qquad x \in [0,\ 7]$$

b)



På bildet ovenfor har vi tegnet inn

$$f(x) = \cos x \cdot \cos(5x) \qquad x \in [0,\ 7]$$

$$g(x) = \cos x \qquad x \in [0,\ 7]$$

$$h(x) = -\cos x \qquad x \in [0,\ 7]$$

Vi ser at $g(x)$ og $h(x)$ ligger symmetrisk om førsteaksen, og at de samtidig 'omringer' en syklus for $f(x)$. Enda tøffere er det at fremstillingen ser det ut som en DNA-spiral. Pent! :)

c)

Vi har

$$\cos(u \pm v) = \cos u \cos v \mp \sin u \sin v$$

og vil vise at

$$\cos u \cos v = \frac{1}{2}\left(\cos(u-v) + \cos(u+v)\right)$$

Begynner med at

$$\cos(u+v) + \cos(u-v) = (\cos u \cos v - \sin u \sin v) + (\cos u \cos v + \sin u \sin v)$$

$$\cos(u+v) + \cos(u-v) = 2\cos u \cos v$$

$$\frac{2\cos u \cos v}{2} = \frac{\cos(u+v) + \cos(u-v)}{2}$$

$$\cos u \cos v = \frac{1}{2} \cdot \left(\cos(u+v) + \cos(u-v)\right)$$

d)

Bruker resultatet fra c) til å regne ut

$$\int \cos x \cdot \cos 5x dx$$

Tar for meg integranden og sammenhengen fra c)

$$\cos x \cdot \cos 5x$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2} \cdot \left(\cos(x-5x) + \cos(x+5x)\right)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2} \cdot \left(\cos(-4x) + \cos(6x)\right)$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2} \cdot \left(\cos(6x) - \cos(4x)\right)$$

Så løser jeg det uegentlige integralet

$$\frac{1}{2}\int \cos(6x) - \cos(4x) dx = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{6}\sin(6x) - \frac{1}{4}\sin(4x)\right) + C$$

e)

Vis at

$$\int_0^{2\pi} \cos mx \cdot \cos nx dx = 0$$

for alle naturlige tall m og n, der $m \neq n$
Bruker igjen sammenhengen fra c, og finner at integranden kan skrives

$$\frac{1}{2} \cdot (\cos(mx - nx) + \cos(mx + nx))$$

$$\frac{1}{2} \cdot (\cos(x(m - n)) + \cos(x(m + n)))$$

Og da får vi

$$\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \cos(x(m - n)) + \cos(x(m + n)) dx =$$

$$\left[\frac{1}{2(m - n)} \cos(x(m - n)) + \frac{1}{2(m + n)} \cos(x(m + n)) \right]_0^{2\pi} =$$

$$F(2\pi) - F(0)$$

$$\left(\frac{1}{2(m - n)} \cos(2\pi(m - n)) + \frac{1}{2(m + n)} \cos(2\pi(m + n)) \right) - \left(\frac{1}{2(m - n)} + \frac{1}{2(m + n)} \right)$$

Vi observerer følgende;

$$\cos(2\pi(m \pm n)) = \cos(2\pi \cdot k) = 1 \text{ for alle } k \in \mathbb{N}, m \neq n$$

Dette kan vises ved perdioden, da

$$P = \frac{2\pi}{c} = \frac{2\pi}{2\pi} = 1$$

Dermed vil integralet, som vi ser, alltid bli null.

$$\left(\frac{1}{2(m - n)} + \frac{1}{2(m + n)} \right) - \left(\frac{1}{2(m - n)} + \frac{1}{2(m + n)} \right) = 0$$

f)

Bestemmer integralet i e) når $m = n$. Vi får:

$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^{2\pi} \cos mx \cdot \cos mx dx \\
&= \int_0^{2\pi} \cos^2(mx) dx \\
&= \int_0^{2\pi} \cos^2(mx) dx \qquad m \in \mathbb{N} \\
&= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (1 + \cos(2mx))\, dx \\
&= \frac{1}{2} \left[x + \frac{1}{2m} \sin(2mx) \right]_0^{2\pi} \\
m \in \mathbb{N} &\implies \sin(4\pi m) = 0, \quad \sin(0) = 0 \\
&\Rightarrow\ I = \pi
\end{aligned}
$$

Dersom du er interessert, finner du flere løsningsforslag på eksamensoppgaver.org

SLUTT