

Løsningsforslag
Eksamen R1 - REA3022 - 28.05.2008

eksamensoppgaver.org

September 14, 2008

Om løsningsforslaget

Løsningsforslaget for matematikk eksamen i R1 er gratis, og det er lastet ned på eksamensoppgaver.org. Løsningen er myntet på elever og privatister som vil forbrede seg til eksamen i matematikk. Lærere må gjerne bruke løsningsforslaget i undervisningsøyemed, men virksomheter har ingen rett til å anvende dokumentet.

Løsningsforslagene skal utelukkende distribueres fra nettstedet eksamensoppgaver.org, da det er viktig å kunne føye til og rette eventuelle feil i ettertid. På den måten vil alle som ønsker det, til enhver tid finne det siste oppdaterte verket. eksamensoppgaver.org ønsker videre at flest mulig skal få vite om eksamensløsningene, slik at det finnes et eget nettsted hvor man kan tilegne seg dette gratis.

Dersom du sitter på ressurser du har mulighet til å dele med deg, eller ønsker å bidra på annen måte, håper eksamensoppgaver.org på å høre fra deg.

Innholdsfortegnelse

oppgave 1	4
a)	4
b)	4
c)	4
d)	4
e.1)	5
e.2)	5
oppgave 2	6
a)	6
b)	6
c)	6
d)	7
e)	7
oppgave 3	7
a)	7
b)	8
c)	8
oppgave 4 - alternativ I	8
a)	8
b)	8
c)	9
d)	9
oppgave 4 - alternativ I - utledet analytisk	9
oppgave 4 - alternativ II	11
a)	11
b)	11
c)	11
d)	13
oppgave 5	13
a)	13
b)	13
c)	14
d)	14
e)	15

oppgave 1

a)

$$\begin{aligned}
 f(x) &= x^2 \cdot \ln x \\
 f'(x) &= (x^2)' \cdot \ln x + x^2 \cdot (\ln x)' \\
 f'(x) &= 2x \ln x + x^{\cancel{2}} \cdot \frac{1}{x} \\
 f'(x) &= 2x \ln x + x \\
 f'(x) &= x(2 \ln x + 1)
 \end{aligned}$$

b)

SETT INN BILDE AV DET DU HAR GJORT HER.

c)

$$\lim_{x \rightarrow 8} \frac{x^2 - 64}{2x - 16}$$

faktorerer

$$\lim_{x \rightarrow 8} \frac{(x+8)(x-8)}{2(x-8)}$$

$$\lim_{x \rightarrow 8} \frac{x+8}{2}$$

setter inn for x

$$\frac{8+8}{2} = 8$$

d)

$$\begin{aligned}
 &\lg(x \cdot y^2) - 2 \lg y + \lg\left(\frac{x}{y^2}\right) \\
 &\lg(x \cdot y^2) + \lg\left(\frac{1}{y^2}\right) + \lg\left(\frac{x}{y^2}\right) \\
 &\lg(x \cdot y^2) + \lg\left(\frac{1}{y^2} \cdot \frac{x}{y^2}\right) \\
 &\lg(x \cdot y^2) + \lg\left(\frac{x}{y^4}\right) \\
 &\lg\left((x \cdot y^2) \cdot \frac{x}{y^4}\right) \\
 &\lg\left(\frac{x^2 \cdot y^{\cancel{2}}}{(y^2)^{\cancel{2}}}\right)
 \end{aligned}$$

$$\lg\left(\frac{x^2}{y^2}\right)$$

Synes alle begge løsningene nedenfor er greie

$$2 \lg\left(\frac{x}{y}\right) = 2(\lg x - \lg y)$$

e.1)

$$f(x) = x \cdot e^{-x}$$

Vi vil vise følgende

$$f'(x) = (x)' \cdot e^{-x} + x \cdot (e^{-x})'$$

$$f'(x) = e^{-x} + x(-1)e^{-x}$$

$$f'(x) = e^{-x} - x \cdot e^{-x}$$

$$f'(x) = (1 - x) \cdot e^{-x}$$

og finne ekstremalpunktene til $f(x)$

$$f'(x) = 0$$

$$(1 - x)e^{-x} = 0$$

$$\frac{1 - x}{e^x} = 0$$

$$1 - x = 0$$

$$-x = -1$$

$$x = 1$$

dermed

$$f(1) = \frac{1}{e}$$

og vi kan konkludere med at vi har funnet et toppunkt i $(1, \frac{1}{e})$

e.2)

$$f''(x) = (e^{-x})' - ((x)' \cdot (e^{-x})) + ((-x) \cdot (e^{-x})')$$

$$f''(x) = -e^{-x} - e^{-x} + ((-x) \cdot (-1)e^{-x})$$

$$f''(x) = -e^{-x} - e^{-x} + xe^{-x}$$

$$f''(x) = (x - 2)e^{-x}$$

FINNE MONOFTONGIEGENSKAPENE.

oppgave 2

a)

Viser at $\vec{u} \perp \vec{v}$

$$\begin{aligned} [a, b] \cdot [-b, a] &= 0 \\ -ab + ab &= 0 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

Skalarproduktet er null og følgelig er vektorene ortogonale.

b)

Vi ser at linja $l \perp \overrightarrow{AB}$.

$$\overrightarrow{AB} = [5 - 1, 1 - 0] = [4, 1]$$

dette kan vi bruke til å finne en retningsvektor for parameterfremstillingen.

Vi setter

$$\begin{aligned} \vec{r} &\perp \overrightarrow{AB} \\ \implies \vec{r} &= [-1, 4] \end{aligned}$$

og sammen med

$$\overrightarrow{CF_3} = [x - 3, y - 4]$$

får vi

$$\begin{aligned} l : \quad & [x - 3, y - 4] = [-1, 4]t \\ l : \quad & x = 3 - t \quad \wedge \quad y = 4 + 4t \end{aligned}$$

c)

Samme resonnement som i deloppgave b). Kaller linja m og vet at $m \perp \overrightarrow{BC}$, derfor

$$\overrightarrow{BC} = [3 - 5, 4 - 1] = [-2, 3]$$

som

$$\begin{aligned} \vec{r}_m &\perp \overrightarrow{BC} \\ \implies \vec{r}_m &= [-3, -2] \\ m : \quad & x = 1 - 3s \quad \wedge \quad y = -2s \end{aligned}$$

d)

Skal finne skjæringspunktene mellom linjene l og m . Setter derfor

$$l = m$$

og løser likningssettet

$$\begin{array}{rcl} 3 - t = 1 - 3s & \wedge & 4 + 4t = -2s \\ & \leftarrow & s = -2 - 2t \\ 3 - t = 1 - 3(-2 - 2t) & & \\ 3 - t = 1 + 6 + 6t & & \\ -7t = 4 & & \\ t = -\frac{4}{7} & \rightarrow & \begin{array}{l} s = -2 - 2\left(-\frac{4}{7}\right) \\ s = -2 + \frac{8}{7} \\ s = -\frac{6}{7} \end{array} \end{array}$$

setter inn for t i l og finner punktet.

$$x = 3 - \left(-\frac{4}{7}\right) = \frac{25}{7}$$

$$y = 4 + 4\left(-\frac{4}{7}\right) = \frac{12}{7}$$

og kontrollerer med s i m

$$x = 1 - 3 \cdot \left(-\frac{6}{7}\right) = \frac{25}{7}$$

$$y = -2 \cdot \left(-\frac{6}{7}\right) = \frac{12}{7}$$

dette stemmer, og vi har funnet skjæringspunktet mellom l og m . Det er gitt ved $\left(\frac{25}{7}, \frac{12}{7}\right)$

e)

SPØRRE OM HJELP

oppgave 3

a)

I noen kortspill har rekkefølgen kortene blir trukket i noe å si. Vi tar utgangspunkt i at rekkefølgen ikke er teller. Dermed skal vi velge 5 kort fra 52 og får

$$\binom{52}{5} = 2598960$$

b)

- A: Korthånden består av 5 spar.
- B: Korthånden består av 5 svarte kort.

Regner ut at

$$P(A) = \frac{\binom{13}{5}}{\binom{52}{5}} = \frac{1287}{2598960} \approx 4.95 \cdot 10^{-4}$$

og

$$P(B) = \frac{\binom{26}{5}}{\binom{52}{5}} = \frac{65780}{2598960} \approx 0.025$$

c)

$$P(A|B) = \frac{\binom{13}{5}}{\binom{26}{5}} = \frac{1287}{65780} \approx 0.020$$

Ja, hendelsene A og B er avhengige hendelser fordi vi regner uten tilbakelegg, og grunnlagt ved at A er en delmengde av B .

oppgave 4 - alternativ I

Denne oppgaven har jeg løst analytisk såvel som grafisk. Oppgaveteksten ber om grafisk, så du må anse de analytiske løsningene som digresjoner.

a)

Vi vet at $f(x)$ er stigende der $f'(x) > 0$ er positiv og minker der $f'(x) < 0$. Av grafen kan vi observere at:

- $f'(x) < 0$ når $x \in \langle \leftarrow, 1 \rangle \cup \langle 3, \rightarrow \rangle$ følgelig minker $f(x)$ i intervallet.
- $f'(x) > 0$ når $x \in \langle 1, 3 \rangle$, altså stiger $f(x)$ i dette intervallet.

b)

Vi vil finne førstekoordinatene (x -koordinatene) til eventuelle topp-, bunn- og vendepunkter på grafen til $f(x)$.

Legger til grunn at $f'(x)$ beskriver stigningstallet til ethvert punkt på $f(x)$. Tangenten til $f(x)$ er parallell med x -aksen ved førstekoordinatene 1 og 3. Fra a) vet vi at $f(x)$ stiger i intervallet der $x \in \langle 1, 3 \rangle$. Dermed har vi et bunnpunkt ved $x = 1$ og toppunkt der $x = 3$

Vendepunktet finner vi på ekstremalpunktet til $f'(x)$. Altså når $x = 2$, det er da stigningstallet er størst.

c)

Vi er gitt $f'(x)$ og ser av grafen at røttene er i punktene $(0, 1)$ og $(0, 3)$. Vi vet at et andregradsuttrykk $ax^2 + bx + c$ kan skrives på formen $(x - x_1)(x - x_2)$ der x_1 og x_2 er røttene til polynomet.

$$(x - 1)(x - 3) = x^2 - 4x + 3$$

Vi observerer videre at grafen til $f'(x)$ har topp-punkt i $(2, 1)$. Da vet vi at a er negativ. Dermed kan vi konkludere med at

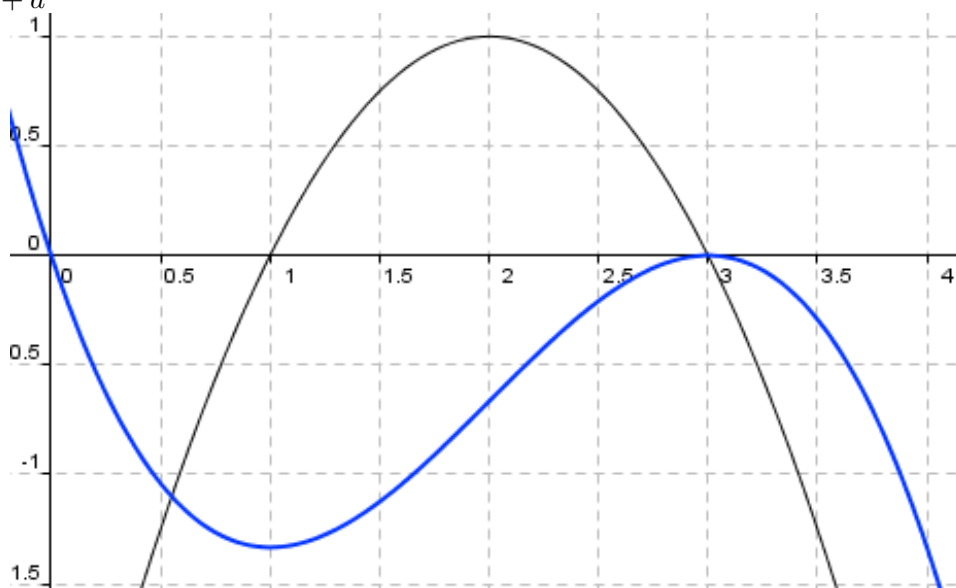
$$f'(x) = -x^2 + 4x - 3$$

d)

Når $f(x)$ går gjennom origo, så har vi sammenhengen

$$x = 0 \implies y = 0$$

Altså er $x_1 = 0$ en av røttene til tredjegradspolynomet på formen $ax^3 + bx^2 + cx + d$



oppgave 4 - alternativ I - utledet analytisk

Vi er gitt $f'(x)$ og ser av grafen at røttene er i punktene $(0, 1)$ og $(0, 3)$. Vi vet at et andregradsuttrykk $ax^2 + bx + c$ kan skrives på formen $(x - x_1)(x - x_2)$ der x_1 og x_2 er røttene til polynomet.

$$(x - 1)(x - 3) = x^2 - 4x + 3$$

Vi observerer videre at grafen til $f'(x)$ har topp-punkt i $(2, 1)$. Da vet vi at a er negativ. Dermed kan vi konkludere med at

$$f'(x) = -x^2 + 4x - 3$$

Videre kan vi nytte integrasjon for å finne den antideriverte til $f'(x)$. Vi setter slik:

$$F(x) = \int f'(x)dx = \int (-x^2 + 4x - 3) dx = -\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 3x + C$$

der C er en konstant. I deloppgave d) får vi oppgitt at grafen til $f(x)$ går gjennom origo. Det betyr at

$$x = 0 \quad \implies \quad y = 0$$

Dermed får vi

$$F(0) = C = 0$$

konstanten C er altså null, og vi har funnet at $f(x)$ er gitt ved

$$f(x) = -\frac{1}{3}x^3 + 2x^2 - 3x$$

Vi vet også at ekstremalpunktene til $f(x)$ har x -verdier der den deriverte $f'(x) = 0$. Dette er fordi den deriverte gir stigningstallet i ethvert punkt på grafen til $f(x)$. Når stigningstallet er 0, er vi derfor enten i et topp- eller bunnpunkt. Setter nå inn røttene x_1 og x_2 i $f(x)$ og finner y -koordinatene.

$$f(1) = -\frac{1}{3} + 2 - 3 = -\frac{4}{3}$$

og

$$f(3) = -\frac{1}{3} \cdot (3)^3 + 2 \cdot (3)^2 - 3 \cdot (3) = -9 + 18 - 9 = 0$$

Videre vil vendepunktet til $f'(x)$ angis når den dobbeltderiverte $f''(x) = 0$. Vi finner dette slik

$$f''(x) = -(x^2)' + 4(x)' - (3)'$$

$$f''(x) = -2x + 4 - 0$$

$$f''(x) = -2x + 4$$

og dermed er vendepunktet

$$f''(x) = 0$$

$$-2x + 4$$

$$x = 2$$

Finner y -koordinaten til dette punktet ved å sette

$$f(2) = -\frac{1}{3} \cdot (2)^3 + 2 \cdot (2)^2 - 3 \cdot (2) = -\frac{8}{3} + 8 - 6 = \frac{14}{3}$$

Vi kan nå konkludere med følgende opplysninger: Ekstremalpunktene er ett bunnpunkt gitt $(1, -\frac{4}{3})$ og ett topppunkt i $(3, 0)$. Vendepunktet har koordinatene $(2, \frac{14}{3})$

oppgave 4 - alternativ II

a)

Alt følger av

$$A = \frac{1}{2} \cdot g \cdot h$$

$\triangle ABC$ er likebeint og innskrevet i en sirkel med radius

$$SB = SC = r = 1$$

Høyden i trekanten er gitt ved tverrsnittet risset inn av

$$CD = (1 + x)$$

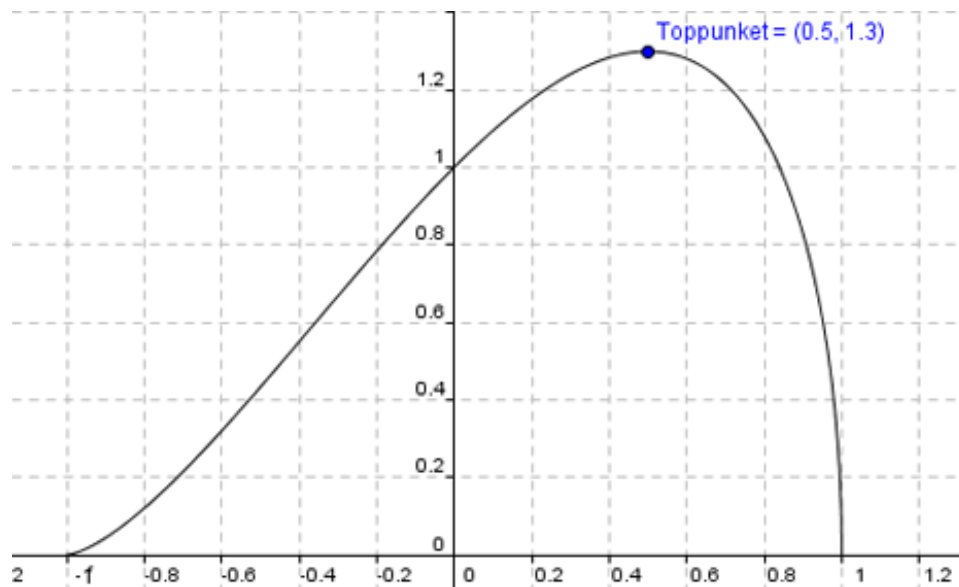
og halve grunnlinjen (dette følger av pytagoras) er

$$\frac{1}{2} \cdot g = DB = DA = \sqrt{1 - x^2}$$

Altså har vi at

$$F(x) = h \cdot \frac{1}{2}g = (1 + x)\sqrt{1 - x^2}$$

b)



c)

Løser ut funksjonsuttrykket

$$F(x) = (1 + x)\sqrt{1 - x^2}$$

$$F(x) = \sqrt{1-x^2} + x\sqrt{1-x^2}$$

Deriverer $F(x)$ og substituerer slik for å gjøre det tydeligere;

$$u = 1 - x^2 \quad u' = -2x$$

$$F'(x) = (\sqrt{u})' \cdot (u)' + (x)' \cdot \sqrt{u} + x \cdot (\sqrt{u})' \cdot (u)'$$

$$F'(x) = \frac{u'}{2\sqrt{u}} + \sqrt{u} + \frac{x \cdot u'}{2\sqrt{u}}$$

Utvider slik at vi får alt på felles brøkstrek

$$F'(x) = \frac{u' + \sqrt{u} \cdot 2\sqrt{u} + x \cdot u'}{2\sqrt{u}}$$

$$F'(x) = \frac{u' + 2u + x \cdot u'}{2\sqrt{u}}$$

Setter tilbake for substitusjonene

$$F'(x) = \frac{(-2x) + 2(1-x^2) + x(-2x)}{2\sqrt{1-x^2}}$$

Rydder og faktoriserer

$$F'(x) = \frac{2(1-x^2) - 2x - 2x^2}{2\sqrt{1-x^2}}$$

$$F'(x) = \frac{1-x-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}$$

Viser at $x = \frac{1}{2}$ for $F'(x) = 0$

$$\frac{1-x-2x^2}{\sqrt{1-x^2}} = 0$$

$$1-x-2x^2 = 0$$

abc-formelen

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot (-2) \cdot 1}}{2 \cdot (-2)}$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{9}}{-4}$$

$$x = \frac{1 \pm 3}{-4}$$

$$x_1 = -1 \quad \vee \quad x_2 = \frac{1}{2}$$

Vi vet at $x > 0$ så $x_2 = \frac{1}{2}$ er det som gir størst areal. Dette stemmer med det vi fant grafisk i b).

d)

Når $x = \frac{1}{2}$ har $\triangle ABC$ sidene AB og $AC = BC$ lengdene;

$$AB = 2 \cdot DB = 2\sqrt{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = 2\sqrt{1 - \frac{1}{4}} = 2\sqrt{\frac{3}{4}} = \sqrt{3}$$

da er

$$DC = \left(1 + \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}$$

og

$$DB = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

av det følger det at

$$\begin{aligned} BC^2 &= DB^2 + DC^2 \\ BC^2 &= \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{3}{2}\right)^2 \\ BC^2 &= \frac{3+9}{4} = \frac{12}{4} = 3 \\ BC &= \sqrt{3} \end{aligned}$$

Altså har vi en likesidet trekant der $AB = BC = CA = \sqrt{3}$

oppgave 5

a)

Vi observerer at linjestykket S_1S_2 er lengden fra sirkelen med sentrum i S_1 med radie a , til sirkelen med sentrum i S_2 og radie lik b .

$$S_1S_3 = a + c$$

og

$$S_2S_3 = b + c$$

b)

Vi ser at linjestykket AC er lik den stiplede linjen, dermed kan vi bruke pytagoras.

$$AC^2 = (S_1S_2)^2 - (a - b)^2$$

Bruker sammenhengen fra a)

$$AC^2 = (a + b)^2 - (a - b)^2$$

$$AC^2 = (a^2 + 2ab + b^2) - (a^2 - 2ab + b^2)$$

$$AC^2 = 4ab$$

$$\sqrt{AC^2} = \sqrt{4ab}$$

$AC > 0$ slik at

$$AC = 2\sqrt{ab}$$

c)

Vil vise at

$$AB = 2\sqrt{ac}$$

Det gjør vi slik

$$AB^2 = (a + c)^2 - (a - c)^2$$

$$AB = \sqrt{a^2 + 2ac + c^2 - a^2 + 2ac - c^2}$$

$$AB = 2\sqrt{ac}$$

og så viser vi at

$$BC = 2\sqrt{bc}$$

slik

$$BC^2 = (S_2S_3)^2 - (b - c)^2$$

bruker det vi fant i a), nemlig at $S_2S_3 = b + c$

$$BC^2 = (b + c)^2 - (b - c)^2$$

$$BC = \sqrt{b^2 + 2bc + c^2 - b^2 + 2bc - c^2}$$

$$BC = 2\sqrt{bc}$$

d)

Ser sammenhengen

$$AC = AB + BC$$

og setter inn det vi har funnet i b) og c)

$$2\sqrt{ab} = 2\sqrt{ac} + 2\sqrt{bc}$$

Multipliserer hele likninga med $\frac{1}{2\sqrt{abc}}$

$$2\sqrt{ab} \cdot \frac{1}{2\sqrt{abc}} = (2\sqrt{ac} + 2\sqrt{bc}) \cdot \frac{1}{2\sqrt{abc}}$$

forkorter

$$\frac{2\sqrt{ab}}{2\sqrt{ab} \cdot \sqrt{c}} = \frac{2\sqrt{ac}}{2\sqrt{ac} \cdot \sqrt{b}} + \frac{2\sqrt{bc}}{2\sqrt{bc} \cdot \sqrt{a}}$$

og renskriver uttrykket

$$\frac{1}{\sqrt{c}} = \frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}}$$

e)

Setter $a = b = r$ og vil finne c uttrykket ved r .

$$\frac{1}{\sqrt{c}} = \frac{1}{\sqrt{a}} + \frac{1}{\sqrt{b}}$$

substituerer som angitt

$$\frac{1}{\sqrt{c}} = \frac{1}{\sqrt{r}} + \frac{1}{\sqrt{r}}$$

$$\frac{1}{\sqrt{c}} = \frac{2}{\sqrt{r}}$$

kryssmultipliserer

$$\sqrt{r} = 2\sqrt{c}$$

isolerer \sqrt{c}

$$\sqrt{c} = \frac{\sqrt{r}}{2}$$

kvadrerer likningen, og vips!

$$c = \frac{r}{4}$$

Dersom du er interessert, finner du flere [løsningsforslag](https://www.gaver.org) på eksamensopp-gaver.org

SLUTT