Løsningsforslag
Eksamen eksempeloppgave R1 - REA3022 - Desember 2007

eksamensoppgaver.org

October 2, 2008

Om løsningsforslaget

Løsningsforslaget for matematikk eksempeloppgave i R1 er gratis, og det er lastet ned på eksamensoppgaver.org. Løsningen er myntet på elever og privatister som vil forbrede seg til eksamen i matematikk. Lærere må gjerne bruke løsningsforslaget i undervisningsøyemed, men virksomheter har ingen rett til å anvende dokumentet.

Løsningsforslagene skal utelukkende distribueres fra nettstedet eksamensoppgaver.org, da det er viktig å kunne føye til og rette eventuelle feil i ettertid. På den måten vil alle som ønsker det, til enhver tid finne det siste oppdaterte verket. eksamensoppgaver.org ønsker videre at flest mulig skal få vite om eksamensløsningene, slik at det finnes et eget nettsted hvor man kan tilegne seg dette gratis.

Dersom du sitter på ressurser du har mulighet til å dele med deg, eller ønsker å bidra på annen måte, håper eksamensoppgaver.org på å høre fra deg.

Innholdsfortegnelse

oppgave 1 **5**
a.1) 5
a.2) 5
b) 5
c) 6
d.1) 6
d.2) 6
e.1) 7
e.2) 7
f) 7

oppgave 2 **9**
a) 9
b) 9
c) 10
d) 11

oppgave 3 **12**
a) 12
b) 12
c) 12
d) 12

oppgave 4 - alternativ I **13**
a) 13
b) 13
c) 14
d) 15
e) 15

oppgave 4 - alternativ II **17**
a) 17
b) 17
c) 18
d) 18
e) 19

oppgave 5 **20**
a) 20
b) 20
c) 21
d) 21
e) 22

f) 23

oppgave 1

a.1)

$$f(x) = x \cdot \ln x$$

deriverer med produktregelen

$$f'(x) = (x)' \cdot \ln x + x \cdot (\ln x)'$$

$$f'(x) = \ln x + \cancel{x} \cdot \frac{1}{\cancel{x}}$$

$$f'(x) = \ln x + 1$$

a.2)

$$g(x) = 3e^{x^2+1}$$

Deriverer uttrykket, og setter da følgende kjerne

$$u = x^2 + 1 \qquad \Longrightarrow \qquad u' = 2x$$

dermed

$$g'(x) = 3\left(e^u\right)' \cdot u'$$

som tilbakesubstitert blir

$$g'(x) = 3 \cdot e^{x^2+1} \cdot 2x$$

og ferdig trukket sammen

$$g'(x) = 6xe^{x^2+1}$$

b)

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^2 + 2x - 3}{x - 1}$$

skriver telleren som to førstegradsfaktorer ved å bruke røttene til uttrykket.

$$\lim_{x \to 1} \frac{(x-1) \cdot (x+3)}{(x-1)}$$

faktoriserer ut nevneren.

$$\lim_{x \to 1} x + 3$$

setter inn for x, og vips!

$$4$$

Grenseverdien er 4.

c)

Kanskje ikke så lett å legge ved dette på en eksamen, men et interessant eksempel er hovedindeksen på Oslo Børs det siste året.

Går ikke så greit der om dagen, som vi ser, hehehe.

d.1)

$$3\ln x - 4 = 0$$
$$3\ln x = 4$$
$$\ln x = \frac{4}{3}$$
$$e^{\ln x} = e^{\frac{4}{3}}$$
$$x = e^{\frac{4}{3}}$$

d.2)

$$e^{2x} - 3e^{x} + 2 = 0$$

her kan vi bruke abc-formelen

$$e^x = \frac{-(-3) \pm \sqrt{(-3)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 2}}{2 \cdot 1}$$
$$e^x = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{2}$$
$$e^x = \frac{3 \pm 1}{2}$$
$$e^x = 1 \quad \vee \quad e^x = 2$$

og løser med hensyn på x

$$\ln e^x = \ln 1 \quad \vee \quad \ln e^x = \ln 2$$
$$x = 0 \quad \vee \quad x = \ln 2$$

e.1)

$$\frac{2^{-4}\cdot 2^{3}}{2^{-2}} = \frac{2^{3+2}}{2^{4}} = \frac{2^{5}}{2^{4}} = 2^{5-4} = 2^{1} = 2$$

e.2)

$$\frac{\sqrt{a}\cdot\left(ab^{2}\right)^{\frac{1}{3}}\cdot b}{\left(a^{2}b\right)^{2}\cdot b^{-\frac{1}{3}}}$$

For å gjøre det tydeligere, løser jeg først ut parentesene

$$\frac{\sqrt{a}\cdot a^{\frac{1}{3}}\cdot b^{2\cdot\frac{1}{3}}\cdot b}{a^{2\cdot 2}b^{2}\cdot b^{-\frac{1}{3}}} = \frac{\sqrt{a}\cdot a^{\frac{1}{3}}\cdot b^{\frac{2}{3}}\cdot b}{a^{4}\cdot b^{2}\cdot b^{-\frac{1}{3}}}$$

trekker deretter sammen like baser i teller og nevner. OBS! $\sqrt{a} = a^{\frac{1}{2}}$

$$\frac{a^{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}\cdot b^{\frac{2}{3}+1}}{a^{4}\cdot b^{2-\frac{1}{3}}} = \frac{a^{\frac{5}{6}}\cdot b^{\frac{5}{3}}}{a^{4}\cdot b^{\frac{5}{3}}}$$

faktoriserer og trekker sammen

$$\frac{a^{\frac{5}{6}}\cdot\cancel{b^{\frac{5}{3}}}}{a^{4}\cdot\cancel{b^{\frac{5}{3}}}} = \frac{a^{\frac{5}{6}}}{a^{4}} = \frac{1}{a^{4-\frac{5}{6}}} = \frac{1}{a^{\frac{19}{6}}} = \frac{1}{\sqrt[6]{a^{19}}} = \frac{1}{\left(\sqrt[6]{a}\right)^{19}}$$

Kontrollerer svaret ved å sette $a = 10$ og $b = 5$. Dersom uttrykket jeg har kommet frem til er riktig, vil svarene i det opprinnelige og ferdig faktoriserte uttrykket være like. Det er kanskje strevsomt å gjøre dette uten noe hjelpemiddel i dette tilfellet, men det kan likvevel være verdt å få med seg.

$$\frac{\sqrt{10}\cdot\left(10\cdot 5^{2}\right)^{\frac{1}{3}}\cdot 5}{\left(10^{2}\cdot 5\right)^{2}\cdot 5^{-\frac{1}{3}}} \approx 6.813\cdot 10^{-4}$$

så

$$\frac{1}{\left(\sqrt[6]{10}\right)^{19}} \approx 6.813\cdot 10^{-4}$$

svarene er like, og da vet vi at uttrykkene er likeverdige. Vær dog obs på at dette ikke betyr at har forenklet helt ferdig.

f)

Velger å løse denne ved å sette følgende lengder for sidene i den vilkårlige trekanten $\triangle ABC$

$$\overline{AB} = \overline{AC} = \overline{BC} = 6$$

altså en likesidet trekant med sider lik 6. Medianene i en trekant går fra ett av toppunktene på trekanten til midtpunktet på den motsatte siden. Vi kaller disse midtpunktene D, E og F. Videre sier Cevas' setning at:

Linjestykkene AE, BF og CD skjærer hverandre i ett punkt hvis og bare hvis

$$\frac{AD}{DB} \cdot \frac{BE}{EC} \cdot \frac{CF}{FA} = 1$$

Setter inn verdiene og regner ut

$$\frac{3}{3} \cdot \frac{3}{3} \cdot \frac{3}{3} = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$$

oppgave 2

a)

$$\begin{array}{ccccccccccc}
x^3 & - & 6x^2 & + & 11x & - & 6 & \div & (x-2) & = & x^2-4x+3 \\
x^3 & - & 2x^2 & & & & & & & & \\
\hline
0 & - & 4x^2 & & & & & & & & \\
 & - & 4x^2 & + & 8x & & & & & & \\
\hline
 & & 0 & + & 3x & & & & & & \\
 & & & + & 3x & - & 6 & & & & \\
\hline
 & & & & 0 & & 0 & & & & \\
\hline
 & & & & & & 0 & & & &
\end{array}$$

b)

Løser andregradslikningen vi fikk ved å utføre polynomdivisjonen på $f(x)$ i a)

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

bruker abc-formelen for å finne røttene

$$x_1 = 3 \quad \vee \quad x_2 = 1$$

som vi stapper inn i

$$(x - x_1)(x - x_2)$$

og får

$$(x-1)(x-3)$$

som vi multipliserer med det vi dividerte med i a)

$$(x-1)(x-3)(x-2)$$

For å vise at dette stemmer, løser vi det ut

$$(x-1)(x-2)(x-3) = (x-1)(x^2-5x+6) = x^3-5x^2+6x-x^2+5x-6 = x^3-6x^2+11x-6$$

Altså er

$$f(x) = (x-1)(x-2)(x-3)$$

c)

Vi skal løse ulikheten

$$\frac{x^3 - 6x^2 + 11x - 6}{x^2 - 9} > 0$$

skriver først telleren $f(x)$ som et produkt av førstegradsfaktorer

$$\frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{x^2 - 9} > 0$$

deretter vil vi faktorisere telleren. Vi finner nullpunktene ved å løse likninga

$$x^2 - 9 = 0$$

$$x^2 = 9$$

$$x = \pm\sqrt{9} = \pm 3$$

altså kan vi skrive ulikheten slik

$$\frac{(x-1)(x-2)(x-3)}{(x-3)(x+3)} > 0$$

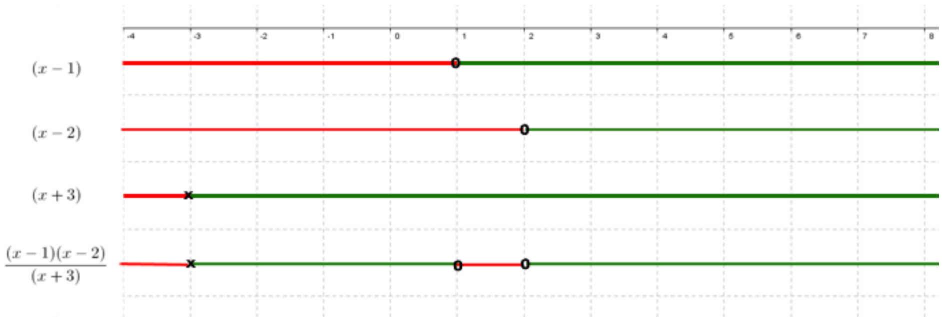
faktoriserer ut

$$\frac{(x-1)(x-2)\cancel{(x-3)}}{\cancel{(x-3)}(x+3)} > 0$$

og får

$$\frac{(x-1)(x-2)}{(x+3)} > 0$$

setter opp følgende fortegnskjema over faktorene



De grønne linjene representerer at ulikheten/faktorene er positv(e). Der de er røde er den/de negative, ved nullene er de null (doh!) og ved kryssene er de udefinerte.

$$L = \langle -3,\, 1\rangle \cup \langle 2,\, \rightarrow\rangle$$

d)

$$x^3 - 2x^2 - 5x + a = 0$$

Vi vil bestemme a slik at likningen får en løsning lik 1

$$1^3 - 2 \cdot 1^2 - 5 \cdot 1 + a = 0$$

$$1 - 2 - 5 + a = 0$$

$$a = 6$$

deretter vil vi løse likningen

$$x^3 - 2x^2 - 5x + 6 = 0$$

Anvender først polynomdivisjon på likningen og bruker divisoren $(x - 1)$ fordi jeg vet at 1 er ei løsning på likningen.

$$\begin{array}{ccccccccccc}
x^3 & - & 2x^2 & - & 5x & + & 6 & \div & (x-1) & = & x^2 - x - 6 \\
x^3 & - & x^2 & & & & & & & & \\
0 & - & x^2 & & & & & & & & \\
\hline
 & - & x^2 & + & x & & & & & & \\
 & & 0 & - & 6x & & & & & & \\
\hline
 & & & - & 6x & - & 6 & & & & \\
 & & & & 0 & & 0 & & & & \\
\hline
 & & & & & & 0 & & & &
\end{array}$$

og løser deretter

$$x^2 - x - 6 = 0$$

$$x = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 \cdot -4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{2 \cdot 1}$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{25}}{2}$$

$$x = \frac{1 \pm 5}{2}$$

$$x_1 = -2 \quad \vee \quad x_2 = 3$$

altså har vi løsningene $x = \{1, -2, 3\}$

oppgave 3

- 55% jenter
  - 25% av jentene har R1
- 45% gutter
  - 30% av guttene har R1
- 30% har fysikk
  - 80% av de som har R1 har fysikk

Definerer følvende hendelser
J: ‘Eleven er ei jente‘, G: ‘Eleven er en gutt‘, R1: ‘Eleven har R1‘ og til slutt, F: ‘Eleven har fysikk‘

a)

$$P(\mathrm{R1}|\mathrm{J}) = 0.25$$
$$P(\mathrm{R1}|\mathrm{G}) = 0.30$$

b)

$$P(\mathrm{G} \cap \mathrm{R1}) = P(\mathrm{G}) \cdot P(\mathrm{R1}|\mathrm{G}) = 0.45 \cdot 0.30 = 0.135 = 13.5\%$$

c)

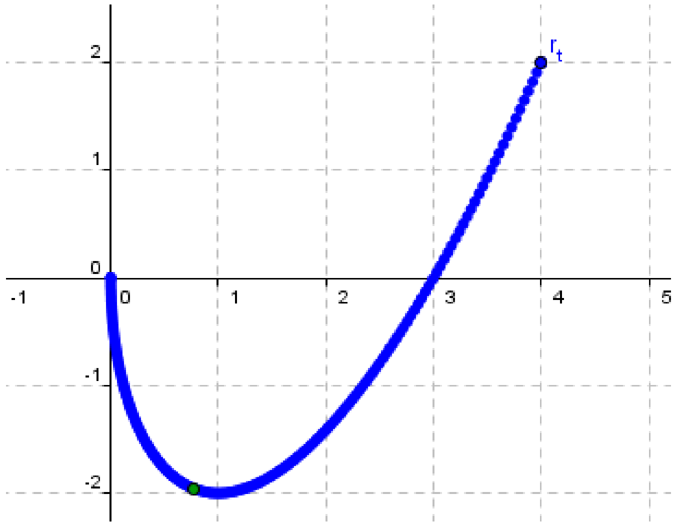
$$P(\mathrm{R1}) = P(\mathrm{G} \cap \mathrm{R1}) + P(\mathrm{J} \cap \mathrm{R1})$$
$$P(\mathrm{R1}) = 0.135 + 0.55 \cdot 0.25 = 0.2725 = 27.25\%$$

d)

Definerer først at
$$P(\mathrm{F}) = 0.30$$
og
$$P(\mathrm{F}|\mathrm{R1}) = 0.80$$
Vi vil vite
$$P(\mathrm{R1}|\mathrm{F}) = \frac{P(\mathrm{R1}) \cdot P(\mathrm{F}|\mathrm{R1})}{P(\mathrm{F})} = \frac{0.2725 \cdot 0.80}{0.30} = 0.72\overline{6} \approx 72.67\%$$

oppgave 4 - alternativ I

a)



Slik ser han ut, lækkert!

b)

$\vec{r}(t)$ har komponentene $x(t)$ og $y(t)$, når $x = 0$, finner vi skjæringspunktet med y-aksen og vice versa når $y = 0$.

$$x(t) = 0$$
$$t^2 = 0$$
$$t = 0$$

så

$$y(0) = 0$$

skjæringspunktet med y-aksen er i $P_1(0, 0)$ altså i origo.

$$y(t) = 0$$
$$t^3 - 3t = 0$$
$$t(t^2 - 3) = 0$$
$$t = 0 \quad \vee \quad t = \pm\sqrt{3}$$

som er samstemt med at vi skjærer både x- og y-aksen i orgio. Videre skjærer vi x-aksen

$$x\left(\sqrt{3}\right) = \left(\sqrt{3}\right)^2 = 3$$

merk at $-\sqrt{3}$ forkastes da $t \geq 0$. Vi har funnet skjæringspunktet med x-aksen i $P_2(0, 3)$

c)

$$\vec{v}(t) = \vec{r}'(t) = \left[\left(t^2\right)', \left(t^3\right)' - 3(t)'\right]$$

$$\vec{v}(t) = \left[2t, 3t^2 - 3\right]$$

Skal nå løse med hensyn på t når

$$|\vec{v}(t)| = 3$$

$$\sqrt{(2t)^2 + (3t^2 - 3)^2} = 3$$

kvadrerer på begge sider

$$(2t)^2 + \left(3t^2 - 3\right)^2 = 9$$

$$4t^2 + \left(9t^4 - 2 \cdot 9t^2 + 9\right) = 9$$

$$4t^2 + 9t^4 - 18t^2 = 0$$

$$9t^4 - 14t^2 = 0$$

substituerer $u = t^2$

$$9u^2 - 14u = 0$$

$$u(9u - 14) = 0$$

$$u = 0 \quad \vee \quad u = \frac{14}{9}$$

setter tilbake substitusjonen og finner

$$t^2 = 0 \quad \vee \quad t^2 = \frac{14}{9}$$

$$t = 0 \quad \vee \quad t = \pm\sqrt{\frac{14}{9}} = \pm\frac{\sqrt{14}}{3}$$

Forkaster svar der $t < 0$ da tiden kun kan være postiv. Setter så prøve på svarene $t = \left\{0, \frac{\sqrt{14}}{3}\right\}$

$$t = 0 \Rightarrow \sqrt{0^2 + (-3)^2} = \sqrt{9} = 3$$

$$t = \frac{\sqrt{14}}{3} \Rightarrow \sqrt{\left(\frac{2\sqrt{14}}{3}\right)^2 + \left(\frac{3\sqrt{14}^2}{3^2} - 3\right)^2} = \sqrt{\frac{4 \cdot 14}{9} + \left(\frac{3 \cdot 14 - 27}{9}\right)^2} = 3$$

Begge svarene stemmer, og vi kan konstatere at vi har funnet de eksakte verdiene for t.

d)

Den er parallell med x-aksen når y-komponenten til $\vec{v}(t)$ er null.

$$y_v(t) = 0$$

$$3t^2 - 3 = 0$$

$$3t^2 = 3$$

og igjen $t \geq 0$

$$t = 1$$

da finner vi

$$\vec{r}(1) = [1, 1-3] = [1, -2] \quad \Longrightarrow \quad P_{v_x}(1, -2)$$

Videre er den parallell med y-aksen når x-komponenten til $\vec{v}(t)$ er null.

$$x_v(t) = 0$$

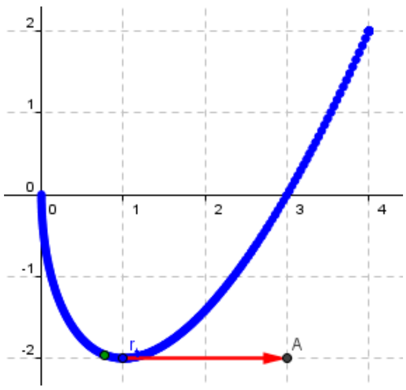
$$2t = 0$$

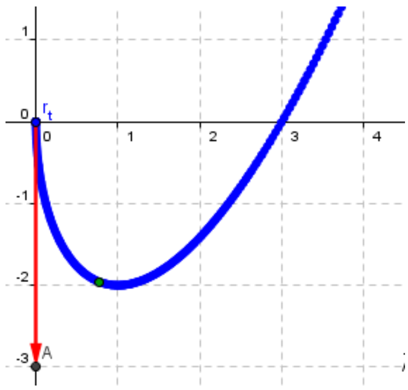
$$t = 0$$

slik at

$$\vec{r}(0) = [0, 0] \quad \Longrightarrow \quad P_{v_y}(0, 0)$$

Her er vektorene illustrert i all sin prakt!





e)

Setter først

$$|\vec{v}(t)| = \sqrt{(2t)^2 + (3t^2 - 3)^2}$$

Når radikanden (det under kvadratroten) når sitt bunnpunkt, har vi funnet t-verdien som gir minst fart. Vi jobber videre med radikanden som jeg kaller $f(t)$.

$$f(t) = 9t^4 - 14t^2 + 9$$

deriverer

$$f'(t) = 9 \cdot 4t^3 - 14 \cdot 2t + (9)'$$
$$f'(t) = 36t^3 - 28t$$

Nå vil jeg finne ekstremalpunktene til $f(t)$;

$$f'(t) = 0$$
$$36t^3 - 28t = 0$$
$$36t\left(t^2 - \frac{7}{9}\right) = 0$$
$$t = 0 \quad \vee \quad t^2 - \frac{7}{9} = 0$$
$$t = 0 \quad \vee \quad t = \pm\frac{\sqrt{7}}{3}$$

Vi har funnet t-verdiene for ekstremalpunktene på radikanden, og nå vil vi se hvilken av dem som gir størst og minst verdi for $t \in [0, 2]$. Da kan vi nemlig finne ut hvilke av dem som er topp- og bunnpunkter. Intuitivt ser vi at

$$f(0) = 9$$

og videre regner vi ut

$$f\left(\frac{\sqrt{7}}{3}\right) = 9 \cdot \left(\frac{\sqrt{7}}{3}\right)^4 - 14 \cdot \left(\frac{\sqrt{7}}{3}\right)^2 + 9$$
$$f\left(\frac{\sqrt{7}}{3}\right) = 9 \cdot \frac{49}{81} - 14 \cdot \frac{7}{9} + 9$$
$$f\left(\frac{\sqrt{7}}{3}\right) = \frac{32}{9}$$

altså

$$f(0) > f\left(\frac{\sqrt{7}}{3}\right)$$

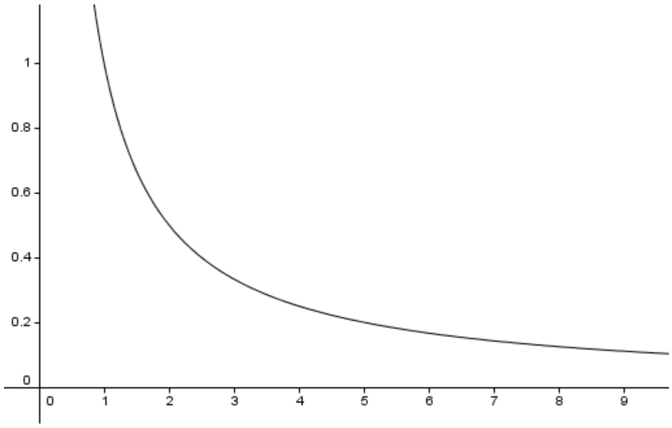
dermed er $f\left(\frac{\sqrt{7}}{3}\right)$ bunnpunktet der farten er lavest. Punktet er gitt ved

$$\vec{r}\left(\frac{\sqrt{7}}{3}\right) = \left[\left(\frac{\sqrt{7}}{3}\right)^2, \left(\frac{\sqrt{7}}{3}\right)^3 - 3 \cdot \left(\frac{\sqrt{7}}{3}\right)\right]$$
$$\vec{r}\left(\frac{\sqrt{7}}{3}\right) = \left[\frac{7}{9}, \frac{(\sqrt{7})^3 - 27\sqrt{7}}{27}\right]$$

så da er punktet med den laveste farten $L\left(\frac{7}{9}, \frac{(\sqrt{7})^3 - 27\sqrt{7}}{27}\right)$. Dette uttrykket ser rimelig grisete ut, men jeg er tilhenger av eksakte verdier, hehe.

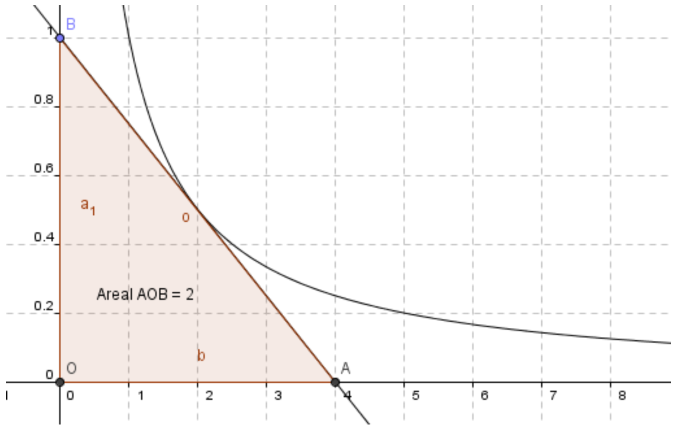
oppgave 4 - alternativ II

a)



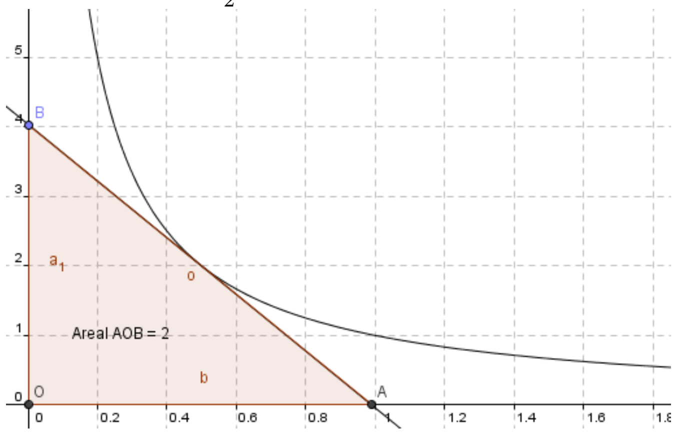
b)

For $a = 2$ er arealet av $\triangle OAB = 2$

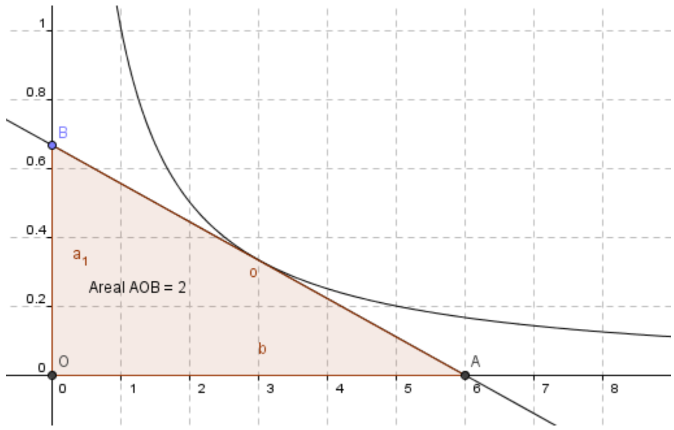


c)

For $a = \frac{1}{2}$ er arealet av $\triangle OAB = 2$



For $a = 3$ er arealet av $\triangle OAB = 2$



Arealet er altså konstant for alle $a = x, x > 0$ i denne oppgaven.

d)

$$f(x) = \frac{1}{x}$$
$$f'(x) = \frac{-1}{x^2}$$
$$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$$

Tangenten blir

$$y - f(a) = f'(a) \cdot (x - a)$$
$$y = f'(a) \cdot (x - a) + f(a)$$

setter inn for $f'(a)$ fra c) og $f(x)$ som ble gitt

$$y = -\frac{1}{a^2} \cdot (x - a) + \frac{1}{a}$$

e)

Tangenten skjærer y-aksen når $x = 0$, da er y-koordinaten

$$y = -\frac{1}{a^2} \cdot (0 - a) + \frac{1}{a}$$

$$y = \frac{a}{a^2} + \frac{1}{a} = \frac{2}{a}$$

og x-aksen når $y = 0$, da er x-koordinaten

$$-\frac{1}{a^2} \cdot (x - a) + \frac{1}{a} = 0$$

$$-\frac{1}{a^2}x + \frac{a}{a^2} = -\frac{1}{a}$$

$$-\frac{1}{a^2}x = -\frac{1}{a} - \frac{1}{a}$$

$$x = \frac{\frac{2}{a}}{\frac{1}{a^2}}$$

$$x = 2a$$

Vi har nå en rettvinklet trekant der hypotenusen er tangenten og x- og y-koordinatene angir katetene. Arealet blir

$$A = \frac{1}{2} \cdot x \cdot y = \frac{1}{2} \cdot 2a \cdot \frac{2}{a} = \frac{2 \cdot 2a}{2a} = 2$$

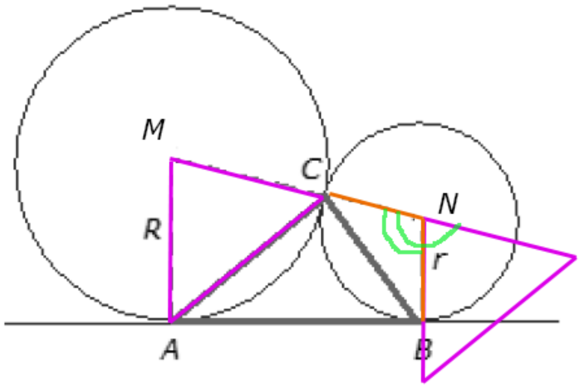
Da er det bekreftet at arealet er konstant.

oppgave 5

a)

Linjen $\overline{MA} = R$ og denne står vinkelrett på $\overline{AB}$. Det samme gjelder $\overline{NB} = r$

$$\overline{MA} \perp \overline{AB} \quad \overline{NB} \perp \overline{AB} \implies \angle BAM = \angle NBA = 90^\circ$$



På tegningen ovenfor har jeg flyttet vinkelen $\angle AMC$ slik at den viser hvordan

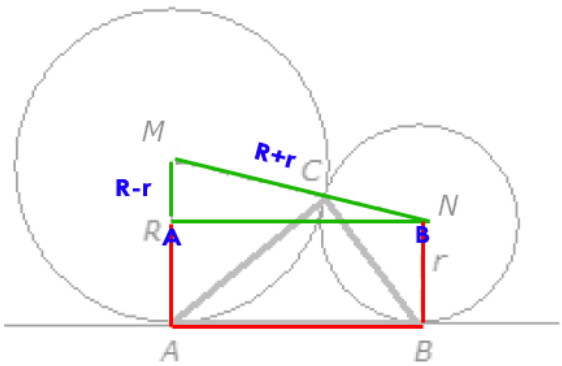
$$\angle AMC + \angle MNB = 180^\circ$$

Dermed kan vi bare flytte over, sånn at

$$\angle MNB = 180^\circ - \angle AMC$$

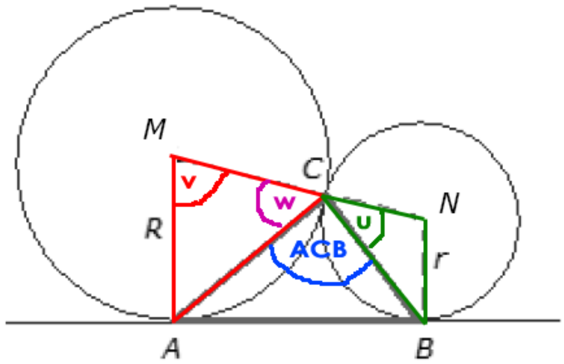
b)

Ser vi på firkanten $ABNM$, ser vi at dersom vi trekker en normal fra N på linjestykket $\overline{MA}$ får vi en rettvinklet trekant med hypotenus $\overline{MN} = R + r$ og motstående katet blir $R - r$. Dette er illustrert på tegningen nedenfor.



$$AB^2 = (R + r)^2 - (R - r)^2$$
$$AB^2 = R^2 + 2Rr + r^2 - R^2 + 2Rr - r^2$$
$$AB^2 = 4Rr$$
$$AB = \sqrt{4Rr} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{Rr} = 2\sqrt{Rr}$$

c)



På bildet ovenfor ser vi at $\triangle AMC$ og $\triangle BNC$ er formlike trekanter. Det betyr at alle vinklene i trekantene svarer til hverandre.

$$\angle u = \angle w$$

Videre ser vi $\angle ACB$ Er gitt ved

$$\angle w + \angle u + \angle ACB = 180^\circ$$
$$\angle ACB = 180^\circ - \angle u - \angle w$$
$$\angle ACB = 180^\circ - 90^\circ = 90^\circ$$

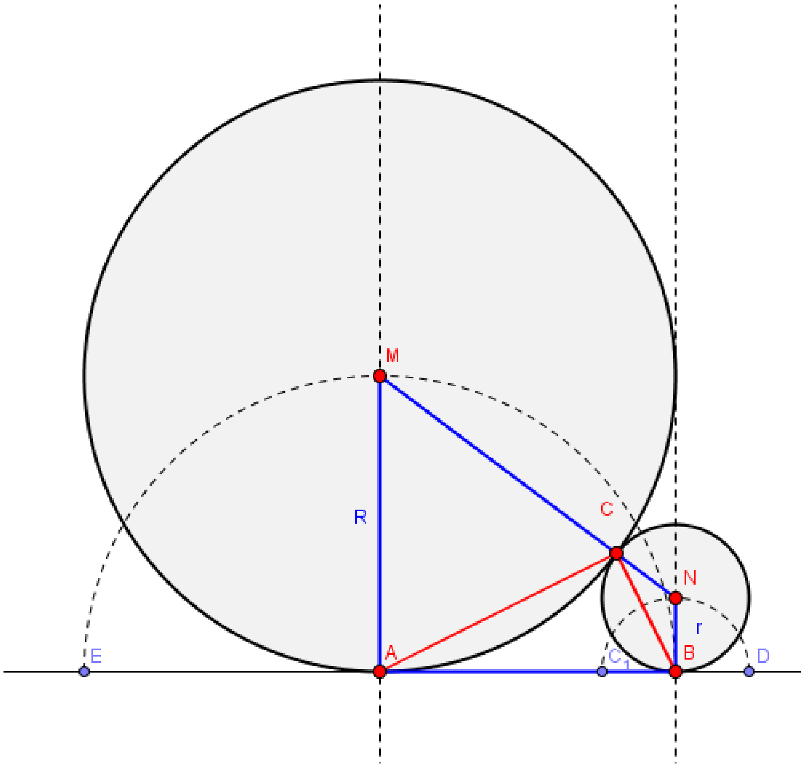
d)

Gitt $R = 4\text{cm}$ og $r = 1\text{cm}$

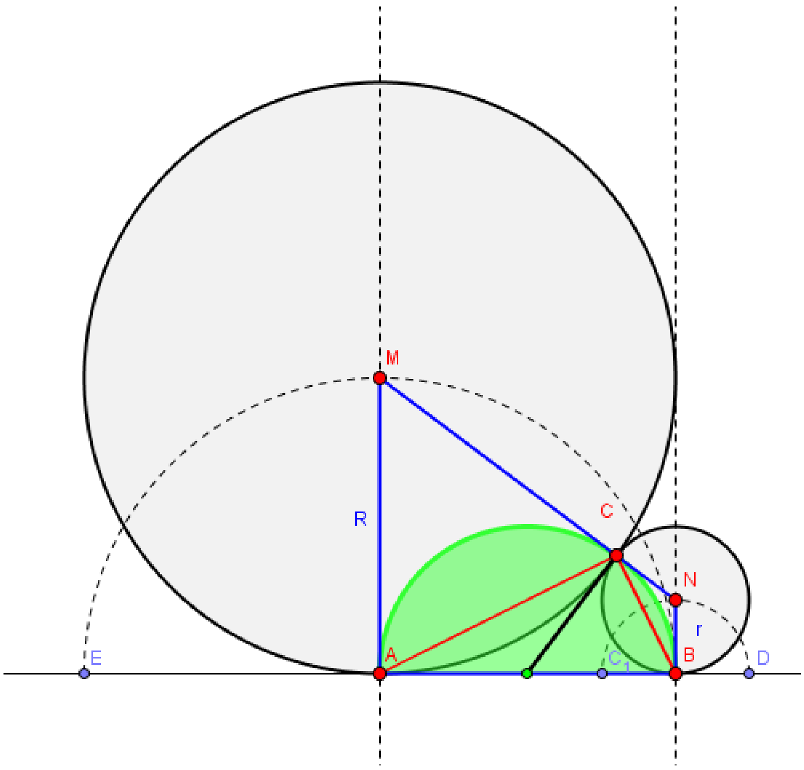
$$AB = 2\sqrt{Rr} = 2\sqrt{4 \cdot 1} = 2 \cdot 2 = 4$$

e)

Her er den i all sin prakt. De stiplede linjene er hjelpelinjer, mens de kontinuerlige er gjengir figuren.



f)



Kaller midtpunktet på AB for Q (ikke innskrevet på tegningen ovenfor) og da ser vi fort at sentralvinklene

$$\angle AQC = \angle AMC$$

Dersom du er interessert, finner du flere løsningsforslag på eksamensoppgaver.org

SLUTT